Aufgabe 1. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\oint_C (x^2 - y^2)dx + (x+y)dy$ längs der Berandung des Quadrats $|x| + |y| \leq 1$.
Lösung: Die Kurve C ist gegeben durch

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4,$$

wobei C_1, C_2, C_3 und C_4 die Kurvensegmente der einzelnen Quadratseiten bezeichnen. Wir parametrisieren zuerst alle 4 Seiten des Quadrats mithilfe von Kurven $\gamma_i : [0,1] \to C_i \subset \mathbb{R}^2$ mit $i \in \{1,2,3,4\}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 : [0,1] \to C_1, t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad dx = -dt, dy = dt \\
\gamma_2 : [0,1] \to C_2, t \mapsto \begin{pmatrix} -t \\ 1-t \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad dx = -dt, dy = -dt \\
\gamma_3 : [0,1] \to C_3, t \mapsto \begin{pmatrix} -1+t \\ -t \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad dx = dt, dy = -dt \\
\gamma_4 : [0,1] \to C_4, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ -1+t \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad dx = dt, dy = dt
\end{aligned}$$

Mithilfe dieser Parametrisierungen können wir nun die Teilkurvenintegrale über C_i berechnen:

$$\int_{C_1} (x^2 - y^2)dx + (x+y)dy = \int_0^1 -((1-t)^2 - t^2) + ((1-t) + t)dt = \int_0^1 2tdt = 1$$

$$\int_{C_2} (x^2 - y^2)dx + (x+y)dy = \int_0^1 -((-t)^2 - (1-t)^2) - ((-t) + (1-t)dt = \int_0^1 0dt = 0$$

$$\int_{C_3} (x^2 - y^2)dx + (x+y)dy = \int_0^1 ((-1+t)^2 - (-t)^2) - ((-1+t) + (-t))dt = \int_0^1 2 - 2tdt = 1$$

$$\int_{C_4} (x^2 - y^2)dx + (x+y)dy = \int_0^1 (t^2 - (-1+t)^2) + (t + (-1+t))dt = \int_0^1 4t - 2dt = 0$$

Damit folgt für das gesamte Integral

$$\oint_C (x^2 - y^2)dx + (x+y)dy = \int_{C_1} (...) + \int_{C_2} (...) + \int_{C_3} (...) + \int_{C_4} (...) = 1 + 0 + 1 + 0 = 2$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C (yz + xz)dx + (xz - xy)dy + (xy + yz)dz$$

entlang der Verbindungslinie der Punkte (0,2,1) und (3,-2,5) sowie entlang der durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 2\cos(\pi t) \\ 4t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

gegebenen Kurve ($0 \leq t \leq 1$). Ist das Integral wegunabhängig ?
Lösung: Wir beginnen zuerst mit dem Kurvenintegral entlang der direkten Verbindungslinie, welche wir mit C_1 bezeichnen Die Parametrisierung dieses geraden Kurvensegments ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\to C_1 \subset \mathbb{R}^3, \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 2 - 4t \\ 1 + 4t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daher transformieren sich die Differentiale zu

$$\begin{aligned} dx &= \gamma_1'(t)dt = 3dt, \\ dy &= \gamma_2'(t)dt = -4dt, \\ dz &= \gamma_3'(t)dt = 4dt. \end{aligned}$$

Somit folgt für das erste Integral

$$I_1 = \int_{C_1} (yz + xz)dx + (xz - xy)dy + (xy + yz)dz = \int_{C_1} z(x + y)dx + x(z - y)dy + y(x + z)dz$$

$$= \int_0^1 3(1 + 4t)(3t + (2 - 4t)) - 4(3t)((1 + 4t) - (2 - 4t)) + 4(2 - 4t)(3t + (1 + 4t))dt$$

$$= \int_0^1 (3 + 12t)(2 - t) - 12t(8t - 1) + (8 - 16t)(1 + 7t)dt$$

$$= \int_0^1 6 + 21t - 12t^2 - 96t^2 + 12t + 8 + 40t - 112t^2 dt$$

$$= \int_0^1 14 + 73t - 220t^2 dt = 14 + 73 \cdot \frac{1}{2} - 220 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{137}{6} \approx 22.83$$

Nun berechnen wir noch das Integral über die Kurve C_2, die durch den Weg $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))^\top$ parametrisiert wird. Für diese Kurve transformieren sich die Differentiale gemäß

$$\begin{aligned} dx &= x'(t)dt = 3dt, \\ dy &= y'(t)dt = -2\pi\sin(\pi t)dt, \\ dz &= z'(t)dt = 8tdt, \end{aligned}$$

wodurch sich für das Integral

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{C_2} (yz + xz)dx + (xz - xy)dy + (xy + yz)dz = \int_{C_2} z(x+y)dx + x(z-y)dy + y(x+z)dz \\ &= \int_0^1 3(4t^2+1)(3t + 2\cos(\pi t)) - 2\pi\sin(\pi t)\cdot(3t)(4t^2+1-2\cos(\pi t)) + 8t(2\cos(\pi t))(3t + 4t^2 + 1)dt \\ &= \int_0^1 36t^3 + 9t + \cos(\pi t)\cdot\big(64t^3 + 72t^2 + 16t + 6\big) + 12\pi t\sin(\pi t)\cos(\pi t) - 6\pi\sin(\pi t)\cdot(4t^3+t)dt \end{aligned}$$

ergibt. Wir teilen nun das Integral in einzelne Teile auf und betrachten diese separat:

$$\int_0^1 (36t^3 + 9t)dt = 36\cdot\frac{1}{4} + 9\cdot\frac{1}{2} = \frac{27}{2}$$

Für den Term der $\cos(\pi t)\cdot\sin(\pi t)$ enthält nutzen wir das Additionstheorem für $\sin(\cdot)$ und erhalten anschließend mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^1 12\pi t\sin(\pi t)\cos(\pi t)dt &= 6\pi\int_0^1 t\sin(2\pi t)dt = 6\pi\left(t\frac{(-\cos(2\pi t))}{2\pi}\Big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{(-\cos(2\pi t))}{2\pi}dt\right) \\ &= 6\pi\cdot\left(\frac{-1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \cos(2\pi t)dt\right) = -3 \end{aligned}$$

Für den Teil mit $6\pi\sin(\pi t)\cdot(4t^3+t)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int_0^1 6\pi\sin(\pi t)\cdot(4t^3+t)dt = 6\pi\cdot\left(\frac{(-\cos(\pi t))}{\pi}\cdot(4t^3+t)\Big|_{t=0}^{t=1} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi t)\cdot(12t^2+1)dt\right) \\ &= 30 + \int_0^1 \cos(\pi t)\cdot(72t^2+6)dt = 30 + \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\cdot(72t^2+6)\Big|_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi t)\cdot 144t\;dt \\ &= 30 - \frac{144}{\pi}\cdot\int_0^1 t\sin(\pi t)dt = 30 - \frac{144}{\pi}\cdot\left(t\cdot\frac{-1}{\pi}\cdot\cos(\pi t)\Big|_{t=0}^{t=1} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi t)dt\right) = 30 - \frac{144}{\pi^2} \end{aligned}$$

Für den letzten Teil nützen wir wieder mehrfach partielle Integration

$$\int_0^1 \cos(\pi t) \cdot \left(64t^3 + 72t^2 + 16t + 6\right) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \sin(\pi t) \cdot \left(64t^3 + 72t^2 + 16t + 6\right) |_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin(\pi t) \cdot \left(192t^2 + 144t + 16\right) dt$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin(\pi t) \cdot \left(192t^2 + 144t + 16\right) dt$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi t) \left(192t^2 + 144t + 16\right) |_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \cos(\pi t) \left(384t + 144\right) dt$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left((-1)(192 + 144 + 16) - 1 \cdot 16\right) - \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \cos(\pi t) \left(384t + 144\right) dt$$

$$= -\frac{368}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \cos(\pi t) \left(384t + 144\right) dt$$

$$= -\frac{368}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{\pi} \sin(\pi t)(384t + 144)|_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin(\pi t) \cdot 384 \ dt \right)$$

$$= -\frac{368}{\pi^2} - \frac{384}{\pi^3} \int_0^1 \sin(\pi t) dt = -\frac{368}{\pi^2} - \frac{384}{\pi^3} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot (\cos(\pi) - \cos(0)) = -\frac{368}{\pi^2} + \frac{768}{\pi^4}$$

Fügen wir alle diese Teilintegrale zusammen erhalten wir schließlich

$$I_2 = \frac{27}{2} + \left(-\frac{368}{\pi^2} + \frac{768}{\pi^4}\right) + (-3) - \left(30 - \frac{144}{\pi^2}\right) = -\frac{39}{2} - \frac{224}{\pi^2} + \frac{768}{\pi^4} \approx -34.31$$

Es gilt also $I_1 \neq I_2$, obwohl beide Kurven den gleichen Startpunkt (0,2,1) und Endpunkt (3,-2,5) haben, das Integral ist damit nicht wegunabhängig.

Aufgabe 3. Überprüfen Sie die Integrabilitätskriterien für das Vektorfeld

$$\mathbf{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} V_1(x,y,z) \\ V_2(x,y,z) \\ V_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz - \cos(x-y) + \cos(x+y) - x\sin(x+y) - \sin(x+z) \\ xz + \cos(x-y) - x\sin(x+y) \\ xy + 2z - \sin(x+z) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $\mathbf{V}$ und berechnen Sie damit das Kurvenintegral

$$\int_{(0,0,0)}^{(\pi,-\pi,2\pi)} \mathbf{V} d\mathbf{x}.$$

Lösung: Wir überprüfen zuerst, ob ein Potential existiert, indem wir zeigen, dass der Rotor des Vektorfeldes überall verschwindet. Wir rechnen leicht nach, dass

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial}{\partial y} V_3 = x = \tfrac{\partial}{\partial z} V_2, \\
&\tfrac{\partial}{\partial z} V_1 = y - \cos(x+z) = \tfrac{\partial}{\partial x} V_3, \\
&\tfrac{\partial}{\partial x} V_2 = z - \sin(x-y) - \sin(x+y) - x \cdot \cos(x+y) = \tfrac{\partial}{\partial y} V_1
\end{aligned}$$

gilt, woraus natürlich sofort

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} V_3 - \frac{\partial}{\partial z} V_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} V_1 - \frac{\partial}{\partial x} V_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} V_2 - \frac{\partial}{\partial y} V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt. Damit ist $\mathbf{V}$ ein Gradientenfeld, es existiert damit also eine Potentialfunktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sodass $V(x,y,z) = \nabla\Phi(x,y,z)$ gilt. Insbesondere ist das Integral damit wegunabhängig und es gilt

$$\int_{(0,0,0)}^{(\pi,-\pi,2\pi)} \mathbf{V} d\mathbf{x} = \Phi(\pi,-\pi,2\pi) - \Phi(0,0,0),$$

analog zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in einer Dimension. Um die Potentialfunktion $\Phi(x,y,z)$ tatsächlich berechnen zu können nutzen wir nun einfach den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in einer Dimension mehrmals wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
V_3(x,y,z) &= \tfrac{\partial}{\partial z} \Phi(x,y,z) \\
\Rightarrow \Phi(x,y,z) &= \int V_3(x,y,z) dz = \int (xy + 2z - \sin(x+z) dz \\
&= xyz + z^2 + \cos(x+z) + C(x,y),
\end{aligned}$$

wobei $C(x,y)$ die Integrationskonstante bezeichnet (nachdem nur bezüglich z integriert wurde, hängt die Integrationskonstante C im allgemeinen von x und y ab). Nun wissen wir damit aber auch, dass

$$\begin{aligned} & xz + \cos(x-y) - x\sin(x+y) = V_2(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y,z) = xz + \frac{\partial}{\partial y}C(x,y) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial y}C(x,y) = \cos(x-y) - x\sin(x+y) \\ \Leftrightarrow \quad & C(x,y) = \int \cos(x-y) - x\sin(x+y)dy = -\sin(x-y) + x\cos(x+y) + \hat{C}(x), \end{aligned}$$

wobei $\hat{C}(x)$ wieder die Integrationskonstante bezeichnet. Setzt man dieses Ergebnis wieder in die Potentialdarstellung von vorher ein, so erhalten wir

$$\Phi(x,y,z) = xyz + z^2 + \cos(x+z) - \sin(x-y) + x\cos(x+y) + \hat{C}(x)$$

Um nun noch $\hat{C}(x)$ zu bestimmen rechnet man einfach nach, dass

$$\begin{aligned} V_1(x,y,z) &= yz - \cos(x-y) + \cos(x+y) - x\sin(x+y) - \sin(x+z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y,z) = yz - \sin(x+z) - \cos(x-y) + \cos(x+y) - x\sin(x+y) + \hat{C}'(x), \end{aligned}$$

woraus nach Elimination von beidseitig auftauchenden Termen nur noch $\hat{C}'(x) = 0$ überbleibt, damit gilt also $\hat{C}(x) = \hat{C} \in \mathbb{R}$. Wie bei Stammfunktionen in einer Dimension ist der Wert der Konstante für ein bestimmtes Integral unerheblich, wir setzen daher einfach $\hat{C} = 0$ und bekommen das Potential

$$\Phi(x,y,z) = xyz + z^2 + \cos(x+z) - \sin(x-y) + x\cos(x+y).$$

Damit folgt schlussendlich für den Wert des Integrals

$$\begin{aligned} \int_{(0,0,0)}^{(\pi,-\pi,2\pi)} \mathbf{V}d\mathbf{x} &= \Phi(\pi,-\pi,2\pi) - \Phi(0,0,0) \\ &= \big(-2\pi^3 + 4\pi^2 + \cos(3\pi) - \sin(2\pi) + \pi\cos(0)\big) \\ &\quad - (0 + 0 + \cos(0) - \sin(0) + 0\cos(0)) \\ &= -2\pi^3 + 4\pi^2 + \pi - 2 \approx -21.393 \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Rechnen Sie den Laplace-Operator

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

in ebene Polarkoordinaten um.
Lösung: Wir definieren

$$w(x,y) = \Delta u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y)$$

und die Koordinatentransformation $\Phi : (0,\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten durch

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

und erhalten damit nach einer kleinen Rechnung unmittelbar

$$D\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} x(r,\varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi} x(r,\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial r} y(r,\varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi} y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

für die Jacobi-Matrix $D\Phi$. Weiters notieren wir $\tilde{w}(r,\varphi) = (w \circ \Phi)(r,\varphi)$ und $\tilde{u}(r,\varphi) = (u \circ \Phi)(r,\varphi)$ für die Funktionen $u(x,y)$ und $w(x,y)$ in Polarkoordinaten, also

$$\begin{aligned} \tilde{u}(r,\varphi) &= u(x(r,\varphi), y(r,\varphi)), \\ \tilde{w}(r,\varphi) &= w(x(r,\varphi), y(r,\varphi)). \end{aligned}$$

Nun liefert die mehrdimensionale Kettenregel

$$\begin{aligned} D\tilde{u}(r,\varphi) &= Du(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) \cdot D\Phi(r,\varphi) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\tilde{u} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}u, \frac{\partial}{\partial y}u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}x & \frac{\partial}{\partial \varphi}x \\ \frac{\partial}{\partial r}y & \frac{\partial}{\partial \varphi}y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

was ausmultipliziert für die einzelnen Komponenten nichts anderes bedeutet als

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\tilde{u} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos(\varphi)\frac{\partial u}{\partial x} + \sin(\varphi)\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi}\tilde{u} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r\sin(\varphi)\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos(\varphi)\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Beachte, dass hier $\frac{\partial u}{\partial x}$ als $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$ zu verstehen ist, die Funktion hängt also immer noch von r und φ ab, auch wenn wir hier um die Notation zu vereinfachen die Abhängigkeit nicht immer explizit anschreiben! Nochmalige Anwendung der Kettenregel für die einzelnen Komponenten und der Satz von Schwarz ($\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$) liefert dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2}\tilde{u} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos(\varphi)\frac{\partial u}{\partial x} + \sin(\varphi)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &= \cos(\varphi)\cdot\left(\cos(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right) + \sin(\varphi)\cdot\left(\cos(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ &= \cos(\varphi)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin(\varphi)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Analog berechnen wir $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\tilde{u} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\tilde{u}\right) = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(-r\sin(\varphi)\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos(\varphi)\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
&\overset{\text{(Produktregel)}}{=} \left(-r\cos(\varphi)\frac{\partial u}{\partial x} - r\sin(\varphi)\frac{\partial u}{\partial y}\right) - r\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
&= -r\left(\cos(\varphi)\frac{\partial u}{\partial x} + \sin(\varphi)\frac{\partial u}{\partial y}\right) - r\sin(\varphi)\left(-r\sin(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r\cos(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)\\
&\quad + r\cos(\varphi)\left(-r\sin(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + r\cos(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\
&= -r\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + r^2\sin(\varphi)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + r^2\cos(\varphi)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

Stellen wir nun die beiden gefundenen Identitäten gegenüber (mit einer kleinen Umformung der zweiten Gleichung) gegenüber haben wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} &= \cos(\varphi)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin(\varphi)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\
\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} &= \sin(\varphi)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos(\varphi)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

und sehen aufgrund von $\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2 = 1$ sofort, dass Addition der beiden Gleichungen zu

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} = \tilde{w}$$

führt.

Alternativ zu dieser Herangehensweise kann man auch die Parametrisierung $r(x, y), \varphi(x, y)$ von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten betrachten. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial x}r &= \cos(\varphi),\\
\tfrac{\partial}{\partial y}r &= \sin(\varphi),\\
\tfrac{\partial}{\partial x}\varphi &= -\frac{\sin(\varphi)}{r},\\
\tfrac{\partial}{\partial y}\varphi &= \frac{\cos(\varphi)}{r}.
\end{aligned}$$

Diese Identitäten können sonst auch leicht mit der Parametrisierung $r(x, y) = x^2 + y^2$ und $\varphi(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ nachgerechnet werden. Mit der mehrdimensionalen Kettenregel und $u(x, y) = \tilde{u}(r(x, y), \varphi(x, y))$ folgt somit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \cos(\varphi)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sin(\varphi)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

Bevor wir die Kettenregel erneut auf diese Ausdrücke anwenden, folgt noch eine kurze Nebenrechnung (Wieder sind $r = r(x, y)$ und $\varphi = \varphi(x, y)$):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\cos(\varphi)) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3} = \frac{\sin(\varphi)^2}{r} \\
\frac{\partial}{\partial y}(\sin(\varphi)) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} = \frac{x^2}{r^3} = \frac{\cos(\varphi)^2}{r} \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin(\varphi)}{r}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos(\varphi)}{r}\right)
\end{aligned}$$

Nun liefert die erneute Anwendung der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(\varphi)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}\right) \\
&= \frac{\sin(\varphi)^2}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \cos(\varphi)\left(\cos(\varphi)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi \partial r}\right) \\
&+ \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r^2}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} - \frac{\sin(\varphi)}{r}\left(\cos(\varphi)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2}\right) \\
&= \frac{\sin(\varphi)^2}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r^2}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} + \cos(\varphi)^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} - \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin(\varphi)^2}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin(\varphi)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}\right) \\
&= \frac{\cos(\varphi)^2}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \sin(\varphi)\left(\sin(\varphi)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi \partial r}\right) \\
&- \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r^2}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} + \frac{\cos(\varphi)}{r}\left(\sin(\varphi)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2}\right) \\
&= \frac{\cos(\varphi)^2}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r^2}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} + \sin(\varphi)^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos(\varphi)^2}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

Mit $\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2$ folgt durch Addition dieser beiden Identitäten wie schon zuvor

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2}$$