Aufgabe 11

Berechnen Sie das Oberflächenintegral:

$$\int_O y\,dy \wedge dz + z\,dz \wedge dx + x\,dx \wedge dy$$

Wobei die Fläche O durch

$$O = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 \leq 4 \,\wedge\, z = x^2 - y^2\right\}$$

gegeben ist. Dabei ist die Orientierung so zu wählen, dass der Normalvektor in (0, 0, 0) positive z-Koordinate hat.

Lösung:

Wenn man O in Zylinderkoordinaten darstellt erhält man:

$$\Phi : (0, 2\pi) \times (0, 2) \to O \quad \text{mit } \Phi(\varphi, r) = \begin{pmatrix} r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ r^2\sin^2(\varphi) - r^2\cos^2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ -r^2\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$

Betrachtet man nun beide Ableitungen erhält man:

$$\frac{d\phi}{d\varphi}(\varphi, r) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) \\ 2r^2\sin(2\varphi) \end{pmatrix} \quad \frac{d\phi}{dr}(\varphi, r) = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ -2r\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$

Man erhält:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{d\varphi}(\varphi, r) \times \frac{d\phi}{dr}(\varphi, r) &= \begin{pmatrix} 2r^2(\cos(2\varphi)\sin(\varphi) - \sin(2\varphi)\cos(\varphi)) \\ 2r^2(\sin(2\varphi)\sin(\varphi) + \cos(2\varphi)\cos(\varphi)) \\ r(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2r^2\sin(\varphi) \\ 2r^2\cos(\varphi) \\ r \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Durch einsetzen erhält man für das Integral:

$$\begin{aligned}\int_O y\,dy \wedge dz + z\,dz \wedge dx + x\,dx \wedge dy &= \int_{(0,2\pi)\times(0,2)} \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ -r^2\cos(2\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2r^2\sin(\varphi) \\ 2r^2\cos(\varphi) \\ r \end{pmatrix} d(\phi, r) \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -2r^3\sin(\varphi)\cos(\varphi) - 2r^4\cos(2\varphi)\cos(\varphi) + r^2\sin(\varphi) d\varphi dr \\ = \int_0^2 \int_0^{2\pi} -2r^4\cos(2\varphi)\cos(\varphi) d\varphi dr &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -2r^4(2\cos^2(\varphi))\cos(\varphi) d\varphi dr = 0\end{aligned}$$

Wobei benutzt wurde, dass für ungerade $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{2\pi} \sin^k(\varphi) = \int_0^{2\pi} \cos^k(\varphi) = 0$$

Aufgabe 12

Berechnen Sie das Oberflächenintegral:

$$\oiint_O x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$$

Wobei die Fläche O durch

$$O = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \,\wedge\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

gegeben ist.
Lösung:
Zuerst behandelt man den Zylinder O_1, mit der Parametrisierung:

$$\phi : (0, 2\pi) \times (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \to O$$
$$\phi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

Man erhält:

$$\frac{d\phi}{d\varphi} \times \frac{d\phi}{dr} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ergibt das Integral:

$$\int_{(0,2\pi)\times(-\sqrt{3},\sqrt{3})} \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} d(\phi, r) = \int_{(0,2\pi)\times(-\sqrt{3},\sqrt{3})} \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) d(\phi, r)$$
$$= \int_{(0,2\pi)\times(-\sqrt{3},\sqrt{3})} 1\, d(\phi, r) = 4\pi\sqrt{3}$$

Seien nun O_2 und O_3 der obere Teil der Kugel (mit $z \geq \sqrt{3}$) und der untere Teil der Kugel (mit $z \leq -\sqrt{3}$). Aus Symmetriegründen sind die Integrale über beide Flächen gleich, es reicht sich also aus O_2 zu betrachten:

$$\psi : (0, 2\pi) \times (0, \pi/6) \to O_2$$
$$\psi(\varphi, \phi) = \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi)\sin(\phi) \\ 2\sin(\varphi)\sin(\phi) \\ 2\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Denn $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ man erhält:

$$\frac{d\psi}{d\varphi}(\varphi,\phi) = \begin{pmatrix} -2\sin(\varphi)\sin(\phi) \\ 2\cos(\varphi)\sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{d\psi}{d\phi}(\varphi,\phi) = \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi)\cos(\phi) \\ 2\sin(\varphi)\cos(\phi) \\ -2\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$-\frac{d\psi}{d\varphi} \times \frac{d\psi}{d\phi} = \begin{pmatrix} 4\cos(\varphi)\sin^2(\phi) \\ 4\sin(\varphi)\sin^2(\phi) \\ 4\sin(\phi)\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,2\pi)\times(0,\pi/6)} \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi)\sin(\phi) \\ 2\sin(\varphi)\sin(\phi) \\ 2\cos(\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4\cos(\varphi)\sin^2(\phi) \\ 4\sin(\varphi)\sin^2(\phi) \\ 4\sin(\phi)\cos(\phi) \end{pmatrix} d(\varphi,\phi) \\
&= 8\int_0^{\pi/6}\int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi)\sin^3(\phi) + \sin^2(\varphi)\sin^3(\phi) + \sin(\phi)\cos^2(\phi) d\varphi d\phi \\
&= 8\int_0^{\pi/6} \pi\sin^3(\phi) + \pi\sin^3(\phi) + 2\pi\sin(\phi)\cos^2(\phi) d\phi \\
&= 8\int_0^{\pi/6} 2\pi\sin(\phi) - 2\pi sin(\phi)\cos^2(\phi) + 2\pi\sin(\phi)\cos^2(\phi) d\phi \\
&= 8 * (2\pi(\cos(0) - \cos(\pi/6))) = 16\pi - 8\sqrt{3}\pi
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\oiint_O x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy = 4\pi\sqrt{3} + 32\pi - 16\pi\sqrt{3} = 32\pi - 12\pi\sqrt{3}$$

Aufgabe 13
Berechnen Sie das Oberflächenintegral für $x, y \in \mathbb{S}^2$:

$$\oiint_{\mathbb{S}^2} \langle x, z\rangle\langle z, y\rangle do(z)$$

Lösung: Man benutzt die Parametrisierung:

$$\psi : (0,2\pi)\times(0,\pi) \to \mathbb{S}^2$$
$$\psi(\varphi,\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\phi) \\ \sin(\varphi)\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$|\frac{d\psi}{d\varphi} \times \frac{d\psi}{d\phi}| = \sin(\phi)$$

Also erhält man für das Integral, man benutzt im zweiten Schritt, dass $\int_0^{2\pi} \sin(\phi)\cos(\phi)d\phi = \int_0^{2\pi} \sin(\phi)d\phi = \int_0^{2\pi} \cos(\phi)d\phi 0$:

$$\begin{aligned}\oiint_{\mathbb{S}^2} \langle x, z\rangle\langle z, y\rangle do(z) \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \big(x_1\cos(\varphi)\sin(\phi) + x_2\sin(\varphi)\sin(\phi)\\ +x_3\cos(\phi)\big)\big(y_1\cos(\varphi)\sin(\phi) + y_2\sin(\varphi)\sin(\phi) + y_3\cos(\phi)\big)\sin(\phi)d\varphi d\phi\\ = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} x_1y_1\cos^2(\varphi)\sin^3(\phi) + x_2y_2\sin^2(\varphi)\sin^3(\phi) + x_3y_3\cos^2(\phi)\sin(\phi)d\varphi d\phi\\ = \int_0^{\pi} x_1y_1\pi\sin^3(\phi) + x_2y_2\pi\sin^3(\phi) + x_3y_3 2\pi\cos^2(\phi)\sin(\phi)d\phi\\ = x_1y_1\pi\frac{4}{3} + x_2y_2\pi\frac{4}{3} + x_3y_3 2\pi\frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

Alternative Lösung: Das Integral kann auch ohne tatsächliches integrieren berechnet werden:

$$\oiint_{\mathbb{S}^2} \langle x, z\rangle\langle z, y\rangle do(z) \oiint_{\mathbb{S}^2} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_iy_jz_iz_jdo(z)$$

Da die Kugel um 0 symmetrisch ist, verschwinden Terme mit z_iz_j mit $i \neq j$. Es bleibt also über:

$$\oiint_{\mathbb{S}^2} x_1y_1z_1^2 + x_2y_2z_2^2 + x_3y_3z_3^2do(z)$$

Nun ist aufgrund der Symmetrie ersichtlich, dass:

$$\oiint_{\mathbb{S}^2} z_1^2do(z) = \oiint_{\mathbb{S}^2} z_2^2do(z) = \oiint_{\mathbb{S}^2} z_3^2do(z)$$

Summiert man die Ergebnisse ergibt sich:

$$3\oiint_{\mathbb{S}^2} z_1^2do(z) = \oiint_{\mathbb{S}^2} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2do(z) = \oiint_{\mathbb{S}^2} 1do(z) = 4\pi$$

Also gilt:

$$\oiint_{\mathbb{S}^2} \langle x, z\rangle \langle z, y\rangle do(z) \oiint_{\mathbb{S}^2} x_1 y_1 z_1^2 + x_2 y_2 z_2^2 + x_3 y_3 z_3^2 do(z)$$
$$= \frac{1}{3}\left(4\pi x_1 y_1 + 4\pi x_2 y_2 + 4\pi x_3 y_3\right) = \frac{4\pi}{3}\langle x, y\rangle$$

Aufgabe 14 Sei U offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie für $x \in U$:

$$I := \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{4\pi r^2} \oiint_{||x-y||=r} f(y)do(y) - f(x)\right) = \frac{1}{6}\Delta f(x)$$

Zuerst benutzt man, dass die Oberfläche der Kugel mit Radius r gleich $4\pi r^2$ ist und erhält:

$$I = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{4\pi r^2} \oiint_{||x-y||=r} f(y) - f(x)do(y)\right)$$

Setzt man die Taylorformel ein erhält man:

$$f(y) - f(x) = \langle \nabla f(x), x - y\rangle + \frac{1}{2}(x-y)^T H_f(x-y) + o(r^2)$$

Der letzte Term ist im Integral vernachlässigbar, denn die Oberfläche ist $4\pi r^2$. Mit der Parametrisierung $\psi_r : (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \to r \cdot \mathbb{S}^3$:

$$\psi_r(\varphi, \phi) = x + \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\phi) \\ r\sin(\varphi)\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Mit:

$$|\frac{d\psi_r}{d\varphi} \times \frac{d\psi_r}{d\phi}| = r^2 \sin(\phi)$$

Man kann also direkt sehen, dass das Oberflächenintegral von $\langle \nabla f(x), x - y\rangle$ verschwinden muss, denn es ist im Eintrag φ ungerade.

Es gilt also:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{8\pi r^2} \oiint\limits_{||x-y||=r} (y-x)^T H_f (y-x) do(y)\right) \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{8\pi r^2} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (\psi_r(\varphi,\phi)-y)^T H_f (\psi_r(\varphi,\phi)-y) r^2 \sin(\phi) d\varphi d\phi\right) \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{8\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} H_{11} r^2 \cos^2(\varphi)\sin^3(\phi) + H_{22} r^2 \sin^2(\varphi)\sin^3(\phi) + H_{33} r^2 \cos^2(\phi)\sin(\phi) d\varphi d\phi\right) \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{8\pi}(H_{11}+H_{22}+H_{33})\frac{4\pi r^2}{3} d\phi\right) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{6}\Delta f(x) = \frac{1}{6}\Delta f(x)
\end{aligned}
$$