1 : Beispiel 15

Weisen Sie den Integralsatz von Stokes für das Kurvenintegral:

$$\oint_C xy\ dx + yz\ dy + xz\ dz$$

nach, wobei C die Berandung der Fläche

$$\mathcal{O} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = x^2 - y^2, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

bezeichnet.

Lösung: Für das Kurvenintegral parametrisieren wir C:

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1-t^2 \end{pmatrix}, \quad C_1'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2t \end{pmatrix}$$

$$C_2(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ t^2-1 \end{pmatrix}, \quad C_2'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$C_3(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -t \\ 1-t^2 \end{pmatrix}, \quad C_3'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2t \end{pmatrix}$$

$$C_4(t) = \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ t^2-1 \end{pmatrix}, \quad C_4'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix}$$

mit $t \in [-1,1]$. Damit erhalten wir für die Teilintegrale:

$$I_1 = \int_{-1}^{1} t(1-t^2) - 2t(1-t^2)dt = -\int_{-1}^{1} t - t^3 dt = 0$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} t - 2t^2(t^2-1)dt = \int_{-1}^{1} -2t^4 + 2t^2 + tdt = \frac{8}{15}$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1} t(1-t^2) + 2t(1-t^2)dt = 3\int_{-1}^{1} t - t^3 dt = 0$$

$$I_1 = \int_{-1}^{1} -t + 2t^2(t^2-1)dt = \int_{-1}^{1} 2t^4 - 2t^2 - tdt = -\frac{8}{15}$$

Und damit als Ergebnis:

$$\oint_C xy\ dx + yz\ dy + xz\ dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{8}{15} - \frac{8}{15} = 0$$

Für das Flächenintegral berechnen wir zuerst die Rotaion unseres Vektorfeldes:

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Weiters parametrisieren wir die Fläche $\mathcal{O}$:

$$\psi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |x| \leq 1, |y| \leq 1$$

Damit folgt:

$$\int_{\mathcal{O}} \langle \nabla \times \vec{F}, \vec{n} \rangle d\vec{o} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \langle -\begin{pmatrix} y \\ x^2 - y^2 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \rangle\ dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 2xy + 2x^3 - 2xy^2 - x\ dxdy = 0$$

Die Ergebnisse der beiden Integrale stimmen überein, also haben wir den Satz von Stokes für dieses Beispiel nachgewiesen.

2 : Beispiel 16

Weisen Sie den Integralsatz von Gauß für das Oberflächenintegral

$$\iint_{\mathcal{O}} x\ dy \wedge dz\ y\ dx \wedge dz\ z\ dx \wedge dy$$

nach, wobei $\mathcal{O}$ die Berandung des Körpers

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 4x^2 + y^2 + z \leq 16,\ z \geq 0\}$$

bezeichnet.

Lösung: Wir parametrisieren die Fläche $\mathcal{O}$:

$$\psi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 16-4x^2-y^2 \end{pmatrix},\ -2 \leq x \leq 2,\ -2\sqrt{4-x^2} \leq y \leq 2\sqrt{4-x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8x \end{pmatrix},\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}(x,y) = \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir für das Flächenintegral:

$$\iint_{\mathcal{O}} x\ dy \wedge dz\ y\ dx \wedge dz\ z\ dx \wedge dy = \int_{-2}^{2}\int_{-2\sqrt{4-x^2}}^{2\sqrt{4-x^2}} \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ 16-4x^2-y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \rangle\ dydx =$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{-2\sqrt{4-x^2}}^{2\sqrt{4-x^2}} 4x^2+y^2+16\ dydx = \int_{-2}^{2} 16x^2\sqrt{4-x^2} + \frac{16}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + 64\sqrt{4-x^2}\ dx$$

Für die einzelnen Integrale verwendet man die Substitution $x = 2sin(u)$ und erhält:

$$\int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 16sin^2(u)cos^2(u)du = 2\pi$$

$$\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 16cos^4(u)du = 6\pi$$

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4cos^2(u)du = 2\pi$$

Damit erhält man als Ergebnis:

$$\int_{-2}^{2} 16x^2\sqrt{4-x^2} + \frac{16}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + 64\sqrt{4-x^2}\ dx = 32\pi + 32\pi + 128\pi = 192\pi$$

Für den Integralsatz von Gauß verwenden wir die Divergenz unseses Vektorfeldes, die sich hier offensichtlich zu $\mathbf{div}(\vec{F}) = 3$ ergibt. Das Volumen B wird parametrisiert durch:

$$-2 \leq x \leq 2,\ -2\sqrt{4-x^2} \leq y \leq 2\sqrt{4-x^2},\ 0 \leq z \leq 16-4x^2-y^2$$

Damit erhalten wir das Volumsintegral:

$$\iiint_B \mathbf{div}(\vec{F})d\vec{V} = 3\int_{-2}^{2}\int_{-2\sqrt{4-x^2}}^{2\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{16-4x^2-y^2} dzdydx = 3\int_{-2}^{2}\int_{-2\sqrt{4-x^2}}^{2\sqrt{4-x^2}} 16-4x^2-y^2\, dydx =$$

$$3\int_{-2}^{2} 64\sqrt{4-x^2} - 16x^2\sqrt{4-x^2} - \frac{16}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} = 192\pi$$

Das letzte Integral löst man analog zu oben. Da die beiden Ergebnisse übereinstimmen, haben wir den Satz von Gauß für dieses Beispiel nachgewiesen.

3 : Besipiel 17

Zeigen Sie für skalare Funktionen f, g und Vektorfelder $\vec{V}, \vec{W}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}(fg) &= f\mathrm{grad}\ g + g\ \mathrm{grad}\ f \\
\mathrm{div}(f\vec{V}) &= \langle \mathrm{grad}\ f, \vec{V}\rangle + f\ \mathrm{div}\vec{V} \\
\mathrm{rot}(f\vec{V}) &= \mathrm{grad}\ f \times \vec{V} + f\ \mathrm{rot}\vec{V} \\
\mathrm{div}(\vec{V}\times\vec{W}) &= \langle \vec{W}, \mathrm{rot}\ \vec{V}\rangle - \langle \vec{V}, \mathrm{rot}\ \vec{W}\rangle
\end{aligned}$$

Lösung: Im folgenden seien die Funktinen f, g sowie die Vektorfelder $\vec{V}, \vec{W}$ von den Variablen x_1, x_2, x_3 abhängig. Dann haben wir für $i = 1, 2, 3$:

$$\mathrm{grad}(fg)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial x_i} + g\frac{\partial f}{\partial x_i} = (f\ \mathrm{grad}(g) + g\ \mathrm{grad}(f))_i$$

$$\mathrm{div}(f\vec{V}) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(fV_i)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3}(\frac{\partial f}{\partial x_i}\ V_i + f\frac{\partial V_i}{\partial x_i}) = \langle \mathrm{grad} f, \vec{V}\rangle + f\ \mathrm{div}(\vec{V})$$

$$\mathrm{rot}(f\vec{V}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2}(fV_3) - \partial_{x_3}(fV_2) \\ \partial_{x_3}(fV_1) - \partial_{x_1}(fV_3) \\ \partial_{x_1}(fV_2) - \partial_{x_2}(fV_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\partial_{x_2}V_3 + V_3\partial_{x_2}f - f\partial_{x_3}V_2 - V_2\partial_{x_3}f \\ f\partial_{x_3}V_1 + V_1\partial_{x_3}f - f\partial_{x_1}V_3 - V_3\partial_{x_1}f \\ f\partial_{x_1}V_2 + V_2\partial_{x_1}f - f\partial_{x_2}V_1 - V_1\partial_{x_2}f \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} V_3\partial_{x_2}f - V_2\partial_{x_3}f + f(\partial_{x_2}V_3 - \partial_{x_3}V_2) \\ V_1\partial_{x_3}f - V_3\partial_{x_1}f + f(\partial_{x_3}V_1 - \partial_{x_1}V_3) \\ V_2\partial_{x_1}f - V_1\partial_{x_2}f + f(\partial_{x_1}V_2 - \partial_{x_2}V_1) \end{pmatrix} = \mathrm{grad} f \times \vec{V} + f\ \mathrm{rot}\vec{V}$$

$$\mathrm{div}(\vec{V}\times\vec{W}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(V_2W_3 - V_3W_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(V_3W_1 - V_1W_3) + \frac{\partial}{\partial x_3}(V_1W_2 - V_2W_1) =$$

$$W_1\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - W_1\frac{\partial V_2}{\partial x_3} + W_2\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - W_2\frac{\partial V_3}{\partial x_1} +$$

$$W_3\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - W_3\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \Bigg(V_1\frac{\partial W_3}{\partial x_2} + V_1\frac{\partial W_2}{\partial x_3}$$

$$+V_2\frac{\partial W_1}{\partial x_3} - V_2\frac{\partial W_3}{\partial x_1} + V_3\frac{\partial W_2}{\partial x_1} - V_3\frac{\partial W_1}{\partial x_2}\Bigg) =$$

$$\langle\vec{W}, \mathrm{rot}\vec{V}\rangle - \langle\vec{V}, \mathrm{rot}\vec{W}\rangle$$

4 : Beispiel 18

Sei $\mathcal{F}$ eine Fläche mit nach oben weisendem Normalvektor, deren Rand der Einheits-kreis $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ ist. Überlegen Sie, dass der Wert des Integrals

$$\iint_{\mathcal{F}} z^2 dy \wedge dz + x^2 dz \wedge dx + y^2 dx \wedge dy$$

nicht von der Fläche $\mathcal{F}$ abhängt. Benutzen Sie diese Überlegung, um das Integral zu bestimmen.

Lösung: *Variante 1:* Wir definieren die Einheitskreisscheibe in der xy-Ebene als $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$. Das zusammenfügen dieser mit der gegebenen Fläche $\mathcal{F}$ erzegt ein Volumen B, für dieses wir mit dem Satz von Gauß gilt:

$$\iiint_B \mathrm{div}\vec{W}\ d\vec{v} = \iint_{\mathcal{F}\cup E} \vec{W} d\vec{o} = \iint_{\mathcal{F}} \vec{W} d\vec{o} + \iint_E \vec{W} d\vec{o}$$

Hierbei bezeichnet $\vec{W}$ das gegebene Vektorfeld. Wichtig zu beachten ist hier dass im Flächenintegral über E der Flächennormalvektor nach unten, dh. in negative z-Richtung zeigt. Da hier allerdings gilt, dass

$$\mathrm{div}\vec{W} = \frac{\partial z^2}{\partial x} + \frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial y^2}{\partial z} = 0$$

folgt mit der obrigen Gleichung:

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{W} d\vec{o} = -\iint_E \vec{W} d\vec{o}$$

Folglich hängt der Wert des Integrals nicht von der Fläche $\mathcal{F}$ ab. Um das Integral zu berechnen Integrieren wir nun einfach über die Einheitskreisscheibe und erhalten:

$$-\iint_E \vec{W} d\vec{o} = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 sin^2(\varphi)(-r) dr d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

Variante 2: Wir suchen ein neues Vektorfeld $\vec{T}$, dessen Rotation gerade unser gegebenes Vektorfeld $\vec{W}$ ergibt. Nach aufstellen der Gleichungen $\nabla \times \vec{T} = \vec{W}$ findet man mit dem Ansatz $T_3 = yz^2$:

$$\nabla \times \begin{pmatrix} zx^2 \\ xy^2 \\ yz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 \\ x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = \vec{W}$$

Damit haben wir also ein passendes Feld gefunden. Damit gilt nach dem Satz von Stokes:

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{W} d\vec{o} = \iint_{\mathcal{F}} \text{rot}\vec{T}\ d\vec{o} = \oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{T} d\vec{s}$$

Damit haben wir ebenfalls die Unabhängigkeit des Integrals von $\mathcal{F}$ gezeigt. Für das Integral parametrisieren wir den Einheitskreis mit $\partial\mathcal{F}(t) = (cos(t), sin(t), 0)$ und erhalten:

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{T} d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \langle \begin{pmatrix} 0 \\ cos(t)sin^2(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -sin(t) \\ cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \rangle\ dt = \int_0^{2\pi} cos^2(t)sin^2(t)\ dt = \frac{\pi}{4}$$