Analysis 2 für Informatikstudien, 6. Übungsblatt

April 30, 2025

19. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

    (a) $y' = \frac{x^3}{e^{2y}}$

        $y'(x)e^{2y(x)} = x^3$
        $\Rightarrow \int_0^x y'(t)e^{2y(t)}dt = \int_0^x t^3 dt = \frac{x^4}{4}$
        Substitution $y(t) = u$:
        $\Rightarrow \int_0^x y'(t)e^{2y(t)}dt = \int_{y(0)}^{y(x)} e^{2u}du = \frac{e^{2u}}{2}\Big|_{y(0)}^{y(x)} = \frac{1}{2}(e^{2y(x)} - e^{2y(0)}) \overset{!}{=} \frac{x^4}{4}$
        $\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{x^4}{2} + e^{2y(0)})$
        Hier wäre $C := \frac{1}{2}\ln(e^{2y(0)})$.

(b) $y' = \frac{x}{y} - \frac{x}{1+y}$

$$y' = \frac{x}{y} - \frac{x}{1+y} = \frac{x \cdot (1+y) - yx}{y \cdot (1+y)} = \frac{x}{y \cdot (1+y)}$$
$$\Rightarrow y'(x) \cdot y(x) \cdot (1 + y(x)) = x$$
$$\Rightarrow \int_0^x y'(t) \cdot y(t) \cdot (1 + y(t))dt = \int_0^x tdt = \frac{x^2}{2}$$

Substitution $y(t) = u$: $\int_0^x y'(t) \cdot y(t) \cdot (1 + y(t))dt = \int_{y(0)}^{y(x)} u \cdot (1+u)du =$

$$= \frac{y(x)^2}{2} + \frac{y(x)^3}{3} - \frac{y(0)^2}{2} - \frac{y(0)^3}{3} \overset{!}{=} \frac{x^2}{2}$$
$$\Rightarrow y(x)^2 + \frac{2}{3}y(x)^3 = x^2 + y(0)^2 + \frac{2}{3}y(0)^3$$

Es reicht diese implizite Darstellung, es ist natürlich nach y bzw. nach x auflösbar aber sehr aufwändig (für y mehr als für x).

Zuerst nach x aufgelöst:

Sei $C := y(0)^2 + \frac{2}{3}y(0)^3$.

$$x^2 = y(x)^2 + \frac{2}{3}y(x)^3 - y(0)^2 - \frac{2}{3}y(0)^3 = y(x)^2 + \frac{2}{3}y(x)^3 - C$$
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y(x)^2 + \frac{2}{3}y(x)^3 - C}$$

Hier nach y aufgelöst:

$$y(x) = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{(648C + 324x^2 - 54) - 2916} + 648C + 324x^2 - 54}}{6\sqrt[3]{2}} +$$
$$+ \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\sqrt{(648C + 324x^2 - 54) - 2916} + 648C + 324x^2 - 54}} - \frac{1}{2}$$

(c) $xy' = y(3-x)$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3-x}{x}$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int_0^x \frac{3-t}{t} dt$$

Mit Substitution $y(t) = u$: $\displaystyle\int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{u} du \overset{!}{=} \int_0^x \frac{3-t}{t} dt =$

$$= \int_0^x \frac{3}{t} - 1 dt = 3\ln|x| - x + C$$

$$\Rightarrow \ln|y(x)| = 3\ln|x| - x + C$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{3\ln|x| - x + C}$$

20. Skizzieren Sie die Lösung des Anfangswertproblems für $t \in [0, 2]$ unter der Verwendung des Euler-Polygons mit $h = 0.5$:

$$\dot{x} = 0.1x(1 - 0.1y)$$
$$\dot{y} = -0.5y(1 - 0.2x)$$
$$x(0) = 4, y(0) = 8$$

x_0, y_0: $x_0 = x(0) = 4, y_0 = y(0) = 8$

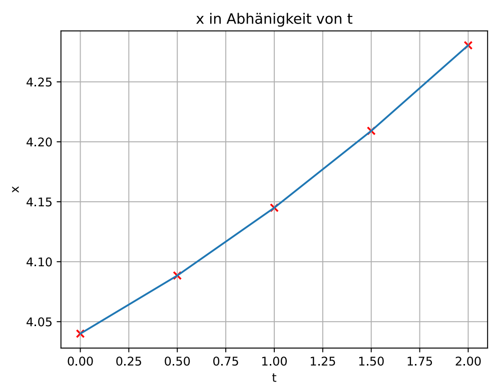
x_1, y_1: $x_1 = x_0 + h \cdot \dot{x}(x_0, y_0) = 4 + h \cdot \dot{x}(4, 8) = 4 + 0.5 \cdot (0.4 \cdot 0.2) = 4.04$
$y_1 = y_0 + h \cdot \dot{y}(x_0, y_0) = 8 + 0.5 \cdot (-0.5 \cdot 8(1 - 0.2 \cdot x_0)) = 7.6$

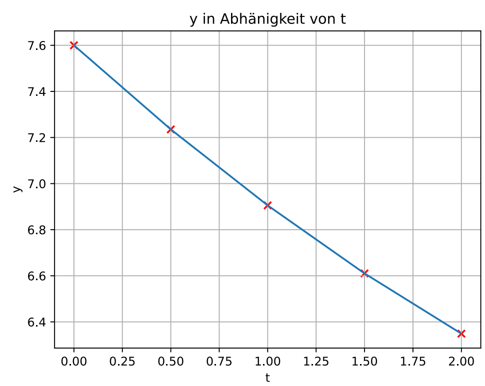
x_2, y_2: $x_2 = x_1 + h \cdot \dot{x}(x_1, y_1) = 4.08848$
$y_2 = y_1 + h \cdot \dot{y}(x_1, y_1) = 7.2352$

x_3, y_3: $x_3 = 4.14499914752, y_3 = 6.9054485248$

x_4, y_4: $x_4 = 4.209133713653304, y_3 = 6.610240306026962$

Plots:





21. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen

(a) $x(x^2 + y^2)dx + (1 - y^2 + x^2y)dy = 0$

Als erstes muss die Integrabilitätsbedingungen überprüft werden:

$$\frac{\partial}{\partial y} x(x^2 + y^2) = 2xy = \frac{\partial}{\partial x}(1 - y^2 + x^2y) \checkmark$$

$$\Rightarrow \Phi(x, y) = \int x(x^2 + y^2)dx = \int x^3 + xy^2 dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + C(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = x^2y + C'(y) \stackrel{!}{=} 1 - y^2 + x^2y$$

$$\Rightarrow C'(y) = 1 - y^2 \Rightarrow C(y) = y - \frac{y^3}{3} + D$$

$$\Rightarrow \Phi(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + y - \frac{y^3}{3} + D = C$$

(b) $(e^x + y^2)dx + 2xydy = 0$

Als erstes muss wieder die Integrabilitätsbedingungen überprüft werden:

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^x + y^2) = 2y = \frac{\partial}{\partial x} 2xy \checkmark$$

$$\Rightarrow \Phi(x, y) = \int e^x + y^2 dx = e^x + xy^2 + C(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = 2xy + C'(y) \stackrel{!}{=} 2xy \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = 0 + D$$

$$\Rightarrow \Phi(x, y) = e^x + xy^2 = C$$

22. Bestimmen Sie Näherungen an die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = xy = f(x,y), y(0) = 1,$$

indem Sie die im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf verwendete Iterationsvorschrift

$$y_0(x) = 1$$
$$y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f(t, y_n(t))dt$$

dreimal anwenden. Vergleichen Sie $y_3(x)$ im Intervall $[0,1]$ graphisch mit der tatsächlichen Lösung.

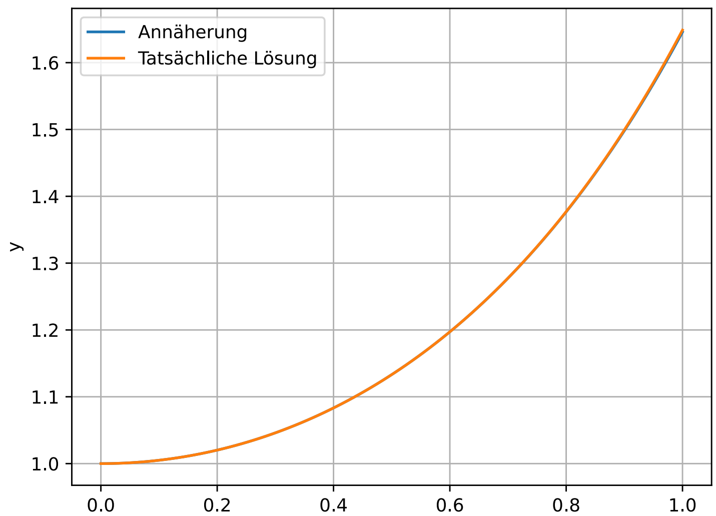
$$y_1(x) = 1 + \int_0^x f(t,1)dt = 1 + \int_0^x tdt = 1 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = 1 + \frac{x^2}{2}$$
$$y_2(x) = 1 + \int_0^x f\left(t, 1 + \frac{x^2}{2}\right)dt = 1 + \int_0^x t\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)dt = 1 + \left(\frac{t^4}{8} + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^x = 1 + \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2}$$
$$y_3(x) = 1 + \int_0^x f\left(t, 1 + \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2}\right)dt = 1 + \int_0^x t\left(1 + \frac{t^4}{8} + \frac{t^2}{2}\right)dt = 1 + \int_0^x t + \frac{t^5}{8} + \frac{t^3}{2}dt =$$
$$1 + \left(\frac{t^6}{48} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^x = 1 + \frac{x^6}{48} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2}$$

Exakte Lösung des AWPs:

$$y' = xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{1}{y}dy = xdx \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int xdx \Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$
$$\Rightarrow y = e^{\frac{x^2}{2}+C} = C_1 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \text{ mit } C_1 = e^C$$

Mit Anfangsbedingung: $y(0) = 1 \Rightarrow C_1 e^0 = 1 \Rightarrow C_1 = 1 \Rightarrow y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$

Vergleich der Annäherung und der tatsächlichen Lösung:



Da man hier kaum einen Unterschied erkennen kann ein paar Werte:

```
x = 0:    Annäherung: 1.0,          tatsächliche Lösung: 1.0
x = 0.25: Annäherung: 1.0317433675, tatsächliche Lösung: 1.0317434074
x = 0.5:  Annäherung: 1.1331380208, tatsächliche Lösung: 1.1331484530
x = 0.75: Annäherung: 1.3245086669, tatsächliche Lösung: 1.3247847587
x = 1:    Annäherung: 1.6458333333, tatsächliche Lösung: 1.6487212707
```