



Analysis 2 für Informatikstudien
Analysis T2
2025

Christoph Aistleitner
Peter Grabner

Inhaltsverzeichnis

1	Integralrechnung	3
1.1	Integrale über Normalbereiche	5
1.2	Substitutionsregel	7
1.3	Dreifachintegrale	11
1.4	Transformationregel für Dreifachintegrale	12
2	Vektoranalysis	15
2.1	Kurvenintegrale	15
2.2	Wegunabhängigkeit	17
2.3	Oberflächenintegrale	19
2.4	Integralsätze	22
2.4.1	Integralsatz von Gauß in der Ebene	22
2.4.2	Integralsätze für Kurven- und Oberflächenintegrale im Raum	26
3	Differentialgleichungen	31
3.1	Differentialgleichungen 1. Ordnung	32
3.1.1	Typ 1: Getrennte Variablen	34
3.1.2	Typ 2: exakte DGL	36
3.1.3	Typ 3: Lineare DGL	37
3.1.4	Typ 4: inhomogene lineare Differentialgleichungen	38
3.2	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	40
3.3	Inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten	43
4	Komplexe Analysis	51
4.1	Komplexe Differenzierbarkeit	52
4.2	Kurvenintegrale im Komplexen	55
4.3	Eigenschaften holomorpher Funktionen	61
4.3.1	Singularitäten	61
4.4	Die Potentialgleichung	64
4.5	Der globale Cauchysche Integralsatz	69
4.5.1	Bestimmung von Residuen	73
4.6	Anwendungen des Residuensatzes	74
4.6.1	Berechnungen von reellen Integralen	74
4.6.2	Anwendung zum Zählen von Nullstellen	81
4.7	Laplace-Transformation	83
4.7.1	Residuenrechnung und Laplacesche Umkehrformel	85

5	Systeme von Differentialgleichungen und Stabilität	91
5.1	Systeme linearer DGL mit konstanten Koeffizienten	91
5.1.1	Inhomogene Systeme von DGL	96
5.2	Qualitatives Verhalten der Lösungen von Systemen von DGL	101
5.2.1	reelle Eigenwerte	102
5.2.2	komplexe Eigenwerte	105
5.3	Stabilitätsuntersuchungen mit der Methode von Ljapunov	110
	Index	115

Kapitel 1

Integralrechnung für Funktionen in mehreren Variablen

Gegeben sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$, A beschränkt. Wir suchen das Volumen des Bereiches

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_d, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid (x_1, x_2, \dots, x_d) \in A \wedge 0 \leq x_{d+1} \leq f(x_1, \dots, x_d)\}.$$

Für $d = 2$ und die Grundfläche $A = [a, b] \times [c, d]$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ wählen wir \mathfrak{Z}_1 eine Zerlegung von $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ und \mathfrak{Z}_2 eine Zerlegung von $[c, d]$: $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$.

Wir setzen

$$m_{ij} = \inf_{(x,y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]} f(x, y)$$
$$M_{ij} = \sup_{(x,y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]} f(x, y)$$

und erhalten damit die Untersumme

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij} (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j)$$

und die Obersumme

$$\overline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij} (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j)$$

Definition 1.0.1. Das obere Riemann-Darboux-Integral ist gegeben durch

$$\overline{\iint}_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy := \inf_{\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2} \overline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2)$$

Das untere Riemann-Darboux-Integral ist gegeben durch

$$\underline{\iint}_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy := \sup_{\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2} \underline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2)$$

Definition 1.0.2. Eine Funktion $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar auf $[a, b] \times [c, d]$, wenn

$$\overline{\iint}_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \underline{\iint}_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy,$$

Wir schreiben dann:

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dx \, dy$$

für den gemeinsamen Wert.

Die Frage stellt sich, wie man diesen Wert berechnen kann, wenn er existiert.

Wir nehmen an, dass

$$A = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dx \, dy$$

existiert. Dann gilt wegen der Definition von A

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) \leq A \leq \overline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2).$$

Wir schätzen weiter Ober- und Untersumme durch Integrale ab

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij} (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij} (y_{j+1} - y_j) \\ &\geq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \overline{S}(f(x_i, y), \mathfrak{Z}_2) \geq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \int_c^d f(x_i, y) \, dy \end{aligned}$$

und daher

$$\overline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) \geq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \int_c^d f(x_i, y) \, dy.$$

Analog erhalten wir

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \int_c^d f(x_i, y) \, dy.$$

Sei nun

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy,$$

dann steht in der letzten Zeile gerade eine Riemannsche Zwischensumme für das Integral

$$\int_a^b g(x) \, dx.$$

Mit dieser Überlegung erhalten wir

$$A = \int_a^b g(x) \, dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dx \, dy.$$

A heißt Doppelintegral oder Zweifachintegral.

Satz 1.1 (Satz von FUBINI). *Sei f stetig auf $[a, b] \times [c, d]$. Dann gilt*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dx \, dy.$$

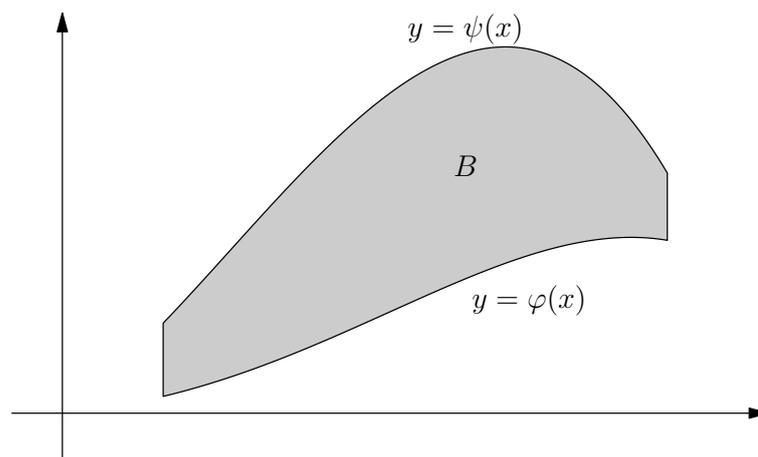


Abbildung 1.1: Normalbereich bezüglich der x -Achse

Bemerkung 1. Stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar.

Beispiel 1. Es ist das Volumen von folgendem Bereich gesucht:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy \, dy \right) dx = \int_0^1 x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4}$$

1.1 Integrale über Normalbereiche

Definition 1.1.1. Eine Teilmenge der Ebene der Form:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

mit zwei gegebenen Funktionen φ, ψ heißt ein Normalbereich bezüglich der x -Achse. Ein Normalbereich bezüglich der y -Achse wird so dargestellt:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

Wir gehen von einem Normalbereich

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

aus und wollen für $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ das Integral

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy$$

erklären und berechnen.

Wähle c, d so, dass $B \subseteq [a, b] \times [c, d]$ und setze

$$\widehat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{für } (x, y) \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_B f &= \iint_{[a,b] \times [c,d]} \widehat{f}(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d \widehat{f}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_c^{\varphi(x)} 0 dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy + \int_{\psi(x)}^d 0 dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

Bemerkung 2. Wenn B ein Normalbereich bezüglich der x -Achse ist gilt für

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

und es gilt:

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} \widehat{f}(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Wenn C ein Normalbereich bezüglich der y -Achse ist, gilt für

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d], \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

dann gilt

$$\iint_C f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Beispiel 2. Berechne das Volumen unter $f(x, y) = y$ über den Bereich

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\} \end{aligned}$$

1. Methode:

$$\begin{aligned} \iint_B y dx dy &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{6} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2. Methode:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y \, dx \right) dy &= \int_0^1 \left(yx \Big|_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} \right) dy \\ \int_0^1 \left(y\sqrt{1-y^2} - \left(-y\sqrt{1-y^2} \right) \right) dy &= \int_0^1 2y\sqrt{1-y^2} \, dy \\ &\quad (u = 1 - y^2, \, du = -2y \, dy) \\ &= \int_{u=1}^{u=0} \sqrt{u} \, (-du) = \int_{u=0}^{u=1} u^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

1.2 Substitutionsregel

Wir wollen bei der Berechnung von $\iint_B f(x, y) \, dx \, dy$ neue Variablen u und v , $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ einführen. Es soll also für eine Variablentransformation

$$\begin{aligned} T : C &\rightarrow B \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy = \iint_C f(x(u, v), y(u, v)) \, du \, dv$$

gelten, wobei wir den ‘‘Umrechnungsfaktor’’ $???$ noch bestimmen müssen.

Um zu verstehen, woher der Faktor $???$ kommt, wollen wir die Substitutionsregel für einfache Integrale noch einmal analysieren:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(T(u))T'(u) \, dx &= \int_{T(a)}^{T(b)} f(x) \, dx \approx R(f, \mathfrak{Z}, \Xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \\ x_i &= T(u_i), \xi_i = T(\eta_i) \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz können wir $x_{i+1} - x_i = T'(\tilde{\eta}_i)(u_{i+1} - u_i)$ schreiben und behalten

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(T(\eta_i))T'(\tilde{\eta}_i)(u_{i+1} - u_i).$$

Der Faktor $T'(\tilde{\eta}_i)$ kann als Umrechnungsfaktor zwischen der Längenmessung in der ‘‘ u -Welt’’ zur Längenmessung in der ‘‘ x -Welt’’ interpretiert werden. (Abb. 1.2)

Wir müssen also verstehen, wie sich die Fläche von Teilrechtecken $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ der Zerlegung unter der Transformation T verändert. Dazu betrachten wir die ersten Näherungen

$$\begin{aligned} x(u, v) &= x(u_i, v_j) + \frac{\partial x}{\partial u}(u_i, v_j)(u - u_i) + \frac{\partial x}{\partial v}(u_i, v_j)(v - v_j) + \text{Fehler} \\ y(u, v) &= y(u_i, v_j) + \frac{\partial y}{\partial u}(u_i, v_j)(u - u_i) + \frac{\partial y}{\partial v}(u_i, v_j)(v - v_j) + \text{Fehler} \end{aligned}$$

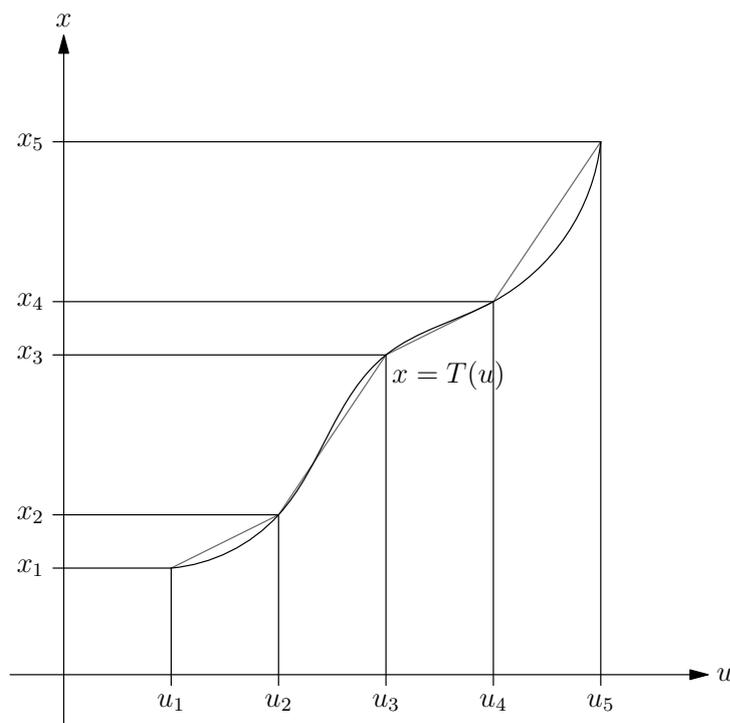


Abbildung 1.2: Umrechnung von u auf x

Die Fläche von $T([u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}])$ ist also annähernd gleich der Fläche des von den Tangentialvektoren in (u_i, v_j) aufgespannten Parallelogramms (Abb. 1.3). Diese Fläche ist gleich

$$\left| \frac{\partial x}{\partial u}(u_i, v_j) \frac{\partial y}{\partial v}(u_i, v_j) - \frac{\partial x}{\partial v}(u_i, v_j) \frac{\partial y}{\partial u}(u_i, v_j) \right| (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j).$$

Damit kann man erwarten, dass

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(T(u_i, v_j)) \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j)$$

ungefähr die Riemann-Summe des transformierten Integrals ist. Dies ist eine Riemann-Summe für das Integral

$$\iint_B f(T(u, v)) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \right| du dv.$$

Damit haben wir folgenden Satz motiviert.

Satz 1.2. (Transformationsregel für Doppelintegrale:) Sei $T : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine einmal stetig differenzierbare, injektive Abbildung, dann gilt:

$$\iint_{T(B)} f(x, y) dx dy = \iint_B f(T(u, v)) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \right| du dv$$

für alle Riemann-integrierbaren Funktionen.

Beispiel 3.

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{die Einheitskreisscheibe}$$

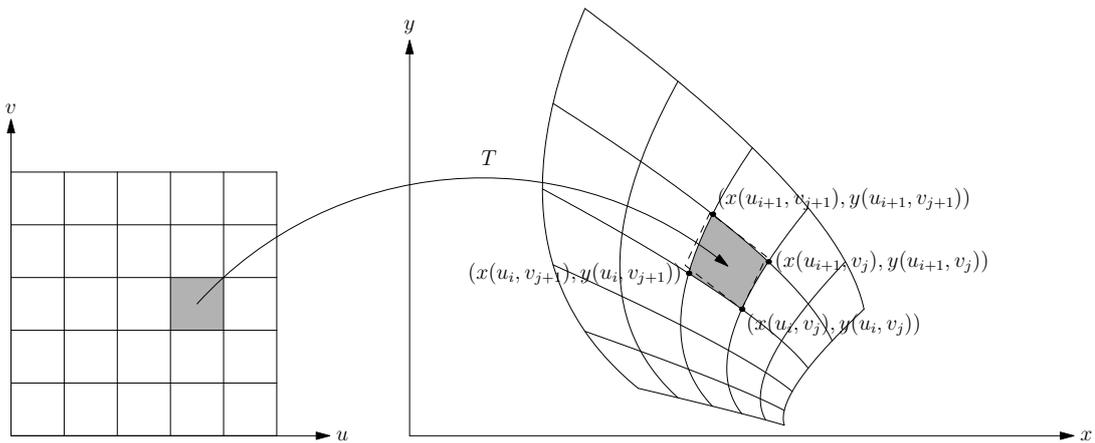


Abbildung 1.3: Zur Variablentransformation

Wir wollen

$$\iint_B x^2 dx dy$$

berechnen, indem wir Polarkoordinaten einführen:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\} T(r, \varphi)$$

$$T^{(-1)}(B) = \{(r, \varphi) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \quad \text{Einheitskreisscheibe in Polarkoordinaten}$$

$$\det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

$$\iint_B x^2 dx dy = \iint_{T^{(-1)}(B)} r^2 \cos^2 \varphi r dr d\varphi = \int_{r=0}^{r=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r^3 \cos^2 \varphi dr d\varphi$$

$$= \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = A$$

$$2A = \int_0^{2\pi} (\sin \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = 1 \Big|_0^{2\pi} \Rightarrow A = \pi$$

$$\Rightarrow \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \pi = \frac{\pi}{4}$$

Bemerkung 3. Transformationsregel für die Umrechnung auf Polarkoordinaten:

$$\iint_{T(B)} f(x, y) dx dy = \iint_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

Beispiel 4. Wir wollen das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

bestimmen. Dies ist zu verstehen als der Grenzwert

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} I(R)$$

mit

$$I(R) = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx.$$

Wir betrachten

$$I(R)^2 = \int_{-R}^R \int_{-R}^R e^{-x^2-y^2} dx dy = \iint_{[-R,R] \times [-R,R]} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Das Quadrat $[-R, R] \times [-R, R]$ enthält den Kreis mit Radius R und ist selbst im Kreis mit Radius $R\sqrt{2}$ enthalten. Damit gilt

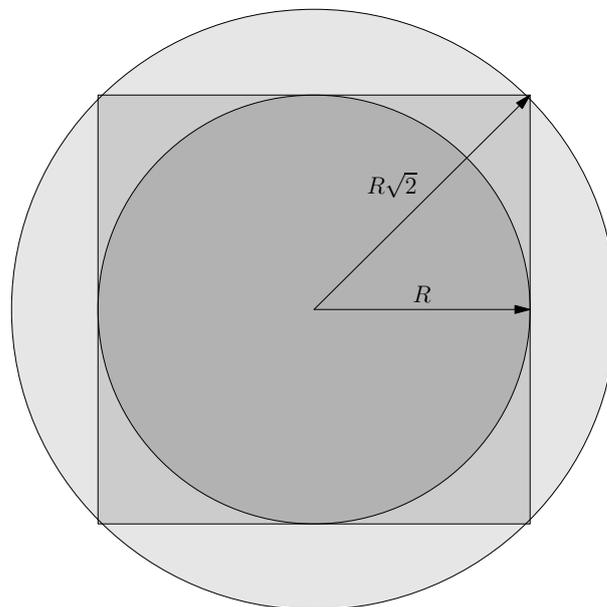


Abbildung 1.4: Die Integrationsbereiche

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq I(R)^2 \leq \iint_{x^2+y^2 \leq 2R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Indem wir nun Polarkoordinaten substituieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_{r=0}^{r=R} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} e^{-r^2} r dr d\varphi = \\ &= \int_0^R r e^{-r^2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi \int_0^R 2r e^{-r^2} dr. \end{aligned}$$

Das letzte Integral können wir durch Substitution leicht berechnen

$$\begin{aligned} u = r^2, du = 2r dr \\ \pi \int_0^R 2r e^{-r^2} dr = \pi \int_0^{R^2} e^{-u} du = \pi(-e^{-u}) \Big|_0^{R^2} = \pi(1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Ungleichung

$$\pi(1 - e^{-R^2}) \leq I(R)^2 \leq \pi(1 - e^{-2R^2}),$$

woraus durch Grenzübergang $R \rightarrow \infty$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I(R)^2 = \pi$$

und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

folgt.

1.3 Dreifachintegrale

Motivation:

$B \in \mathbb{R}^3$ beschreibt einen Körper; $\rho(x, y, z)$ -Dichte des Materials im Punkt (x, y, z)

$$\text{Masse von } B = \iiint_B \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Wie bei Doppelintegralen gilt dann

$$\iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [g,h]} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_g^h f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Definition 1.3.1. (Normalbereich in \mathbb{R}^3 :) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und

$$B = \{(x, y) | a < x < b, f(x) < y < g(x)\}$$

der durch diese beiden Funktionen bestimmte Normalbereich. Seien weiters $\varphi, \psi : B \rightarrow \mathbb{R}$. Dann beschreibt

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | a < x < b, f(x) < y < g(x), \varphi(x, y) < z < \psi(x, y)\}$$

einen dreidimensionalen Normalbereich.

Bemerkung 4. Sei V der eben beschriebene Normalbereich. Dann gilt

$$\iiint_V h(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} h(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Beispiel 5. Der Bereich V sei gegeben durch

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 < x < 1, \quad 0 < y < x, \quad 0 < z < xy\}.$$

Wir bestimmen

$$\begin{aligned} \iiint_V xyz dx dy dz &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=x} \left(\int_{z=0}^{z=xy} xyz dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=x} \left(xy \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{z=xy} dy \right) dx = \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{x^3}{2} \frac{y^4}{4} \Big|_{y=0}^{y=x} \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} \frac{x^7}{8} = \frac{x^8}{64} \Big|_0^1 = \frac{1}{64}. \end{aligned}$$

Beispiel 6. Gegeben sei ein Bereich $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| \leq 1\}$. Gesucht ist sein Volumen.

$$\begin{aligned}
 W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0, x + y + z \leq 1\} = \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\} \\
 V &= \iiint_B 1 \, dx \, dy \, dz = \\
 &= 8 \iiint_W dx \, dy \, dz = 8 \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=1-x} \left(\int_{z=0}^{z=1-x-y} dz \right) dy \right) dx \\
 &= 8 \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=1-x} (1 - x - y) \, dy \right) dx \\
 &= 8 \int_{x=0}^{x=1} \left(\left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=1-x} \right) dx \\
 &= 8 \int_{x=0}^{x=1} \left(1 - x - x(1 - x) - \frac{(1 - x)^2}{2} \right) dx \\
 &= 8 \int_{x=0}^{x=1} \frac{(1 - x)^2}{2} dx = -8 \frac{1}{6} (1 - x)^3 \Big|_{x=0}^{x=1} = 8 \frac{1}{6} = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Beispiel 7.

$$\iiint_{|x|+|y|+|z|\leq 1} xyz \, dx \, dy \, dz = 0$$

Der Integrationsbereich ist symmetrisch und der Integrand ungerade (d.h. $f(-x, -y, -z) = -f(x, y, z)$), daher muss man das Integral nicht ausrechnen. Man kann „durch Hinschauen“ erkennen, dass das Integral verschwindet.

1.4 Transformationsregel für Dreifachintegrale

Satz 1.3. (Transformationsregel für Dreifachintegrale:) Sei $T : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine einmal stetig differenzierbare, injektive Abbildung gegeben durch

$$(u, v, w) \mapsto (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)).$$

Dann gilt

$$\iiint_{T(B)} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_B f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \det \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right) \right| \, du \, dv \, dw.$$

Beispiel 8.

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} (x^2 + y^2) z^2 \, dx \, dy \, dz = ?$$

Substitution mit räumlichen Polarkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq r, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (oder $-\pi \leq \varphi \leq \pi$). Für die Jacobi-Determinante erhalten wir

$$\det \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right) = \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (x^2 + y^2)z^2 dx dy dz = \\ &= \int_{r=0}^{r=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) r^2 \cos^2 \theta (r^2 \sin \theta) dr d\theta d\varphi = \\ &= \int_{r=0}^{r=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^6 \sin^3 \theta \cos^2 \theta dr d\varphi d\theta = \\ &= \int_{r=0}^{r=1} r^6 dr \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{7} 2\pi \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \cos^2 \theta d\theta \\ &u = \cos \theta, du = -\sin \theta d\theta \\ &= \frac{2\pi}{7} \int_1^{-1} (1 - u^2) u^2 (-du) \\ &= \frac{2\pi}{7} \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8\pi}{105} \end{aligned}$$

Beispiel 9. Bestimme das Volumen des Körpers, der von der durch $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x$ beschriebenen Fläche begrenzt wird.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$r^4 = r \cos \theta \Rightarrow r^3 = \cos \theta, r \geq 0 \Rightarrow \cos \theta \geq 0 : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ Damit erhalten

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq \sqrt[3]{\cos \theta}$$

$$\begin{aligned} \text{Volumen } V &= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=\sqrt[3]{\cos \theta}} r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=\sqrt[3]{\cos \theta}} r^2 \sin \theta dr d\theta = \\ &= 2\pi \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3} \sin \theta \Big|_{r=0}^{r=\sqrt[3]{\cos \theta}} d\theta = \frac{2\pi}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &u = \cos \theta, du = -\sin \theta d\theta \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_1^0 u(-du) = \frac{2\pi}{3} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Beispiel 10. Bestimme das Volumen des durch $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{64}{x^2 + y^2}$ begrenzten Bereiches. Wir führen Zylinderkoordinaten ein:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\det \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} \right) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)^2 &= \frac{64}{x^2 + y^2} \\ \Rightarrow (r^2 + z^2)^2 &= \frac{64}{r^2} \\ \Rightarrow r^2 + z^2 &= \frac{8}{r} \\ \Rightarrow z^2 &= \frac{8 - r^3}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 - r^3 \geq 0 &\Rightarrow r \leq 2; z^2 \leq \frac{8 - r^3}{r} \\ \Rightarrow -\sqrt{\frac{8 - r^3}{r}} &\leq z \leq \sqrt{\frac{8 - r^3}{r}}; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad 0 \leq r \leq 2 \end{aligned}$$

Das Volumen von V ist dann

$$\begin{aligned} &\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=2} \int_{z=-\sqrt{\frac{8-r^3}{r}}}^{z=\sqrt{\frac{8-r^3}{r}}} r \, dz \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \int_{r=0}^{r=2} \int_{z=-\sqrt{\frac{8-r^3}{r}}}^{z=\sqrt{\frac{8-r^3}{r}}} r \, dz \, dr \\ &= 2\pi \int_{r=0}^{r=2} 2\sqrt{\frac{8-r^3}{r}} r \, dr \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^8 \sqrt{\frac{8-u}{u}} \, du = \frac{16\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt $r^3 = u$ substituiert. Das Integral läßt sich durch die Substitution

$$t = \sqrt{\frac{8-u}{u}}$$

berechnen.

Kapitel 2

Vektoranalysis

Definition 2.0.1. Eine Abbildung $\mathbf{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt *Vektorfeld*. Jedem Punkt von U wird ein Vektor zugeordnet.

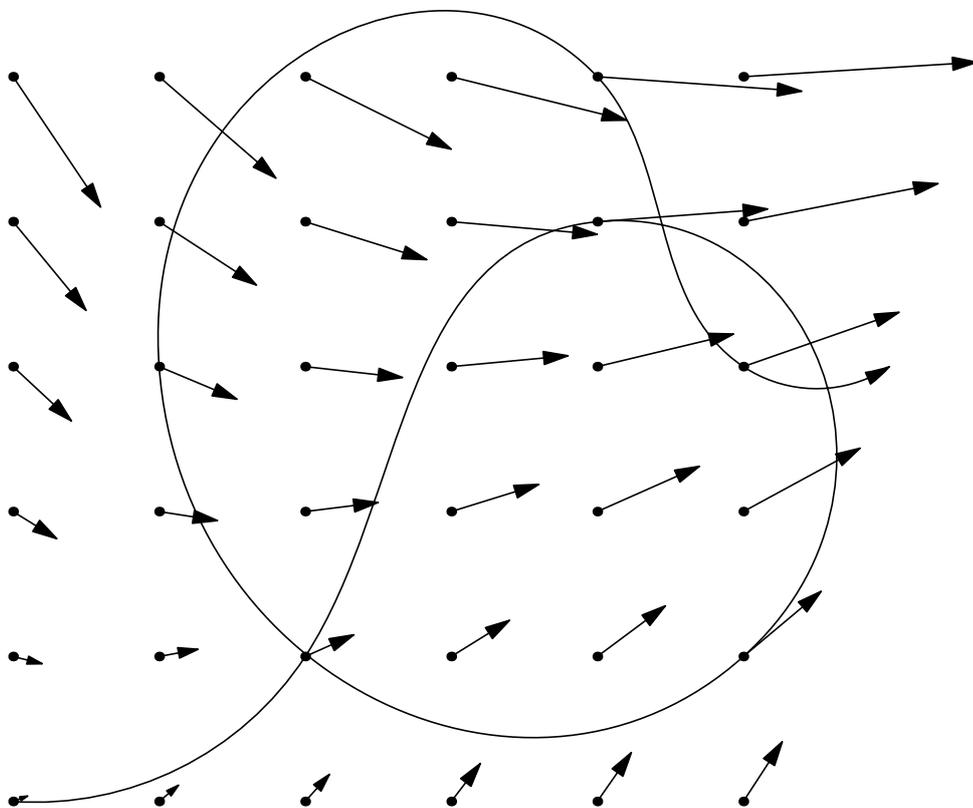


Abbildung 2.1: Vektorfeld

Beispiele: Strömung, Gravitation, elektrisches Feld.

2.1 Kurvenintegrale

Sei $\mathbf{x}(t)$ eine Kurve (Bewegung im Vektorfeld). Gesucht wird die Arbeit, die bei Bewegung entlang der Kurve im Feld verrichtet wird. Es gilt

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft(in Wegerichtung)} \times \text{Weg.}$$

$$\mathbf{x}(t_0 + h) - \mathbf{x}(t_0) \approx \dot{\mathbf{x}}(t_0)h$$

Die Arbeit entlang der Kurve zwischen $\mathbf{x}(t_0)$ und $\mathbf{x}(t_0 + h)$ ist daher etwa

$$\|\mathbf{V}(\mathbf{x}(t_0))\| \cdot \|h\dot{\mathbf{x}}(t_0)\| \cos(\alpha) = \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_0)), h\dot{\mathbf{x}}(t_0) \rangle = h\langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_0)), \dot{\mathbf{x}}(t_0) \rangle$$

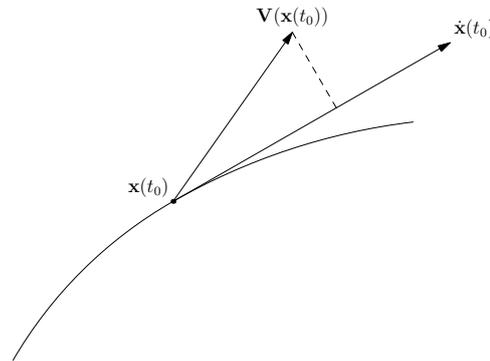


Abbildung 2.2: Arbeit entlang einer Kurve im Vektorfeld \mathbf{V}

Damit erhalten wir für die Arbeit entlang der Kurve $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow U$:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b [V_1(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t) + V_2(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t) + V_3(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t)] dt \\ & \qquad \qquad \qquad =: \int_C V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz = \int_C \mathbf{V} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Wichtig: Die Kurve ist nicht nur die Trägermenge C sondern hat auch eine Orientierung.

Die letzte Definition legt nahe, dass das Kurvenintegral nur vom Vektorfeld und der orientierten Kurve, aber nicht von der Parametrisierung der Kurve abhängt:

$$\int_C \mathbf{V} d\mathbf{x} := \int_a^b \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle dt$$

Wir wollen die Kurve mit einer anderen Parametrisierung versehen, also

$$\begin{aligned} \varphi : [c, d] &\rightarrow [a, b], \quad t = \varphi(u), \quad dt = \dot{\varphi}(u) du, \\ \varphi(c) &= a, \quad \varphi(d) = b. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{V} \, d\mathbf{x} &:= \int_c^d \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(\varphi(u))), \dot{\mathbf{x}}(\varphi(u)) \rangle \varphi'(u) \, du \\ &= \int_c^d \langle \mathbf{V}(\mathbf{y}(u)), \dot{\mathbf{y}}(u) \rangle \, du\end{aligned}$$

mit $\mathbf{y}(u) = \mathbf{x}(\varphi(u))$. Der Vektor \mathbf{y} durchläuft die selbe Menge wie \mathbf{x} mit der selben Orientierung und es gilt

$$\int_c^d \langle \mathbf{V}(\mathbf{y}(u)), \dot{\mathbf{y}}(u) \rangle \, du = \int_a^b \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle \, dt.$$

Bemerkung 5. Das Kurvenintegral hängt vom Vektorfeld \mathbf{V} , von der Kurve C und ihrer Orientierung, aber **nicht** von der Parametrisierung der Kurve ab.

Beispiel 11. Sei C die Verbindungsstrecke von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 2, 3)$

$$\begin{aligned}\int_C xy \, dx + z \, dy + y \exp(z) \, dz &= \\ \text{Parametrisierung: } \mathbf{x}(t) &= t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}, t \in [0, 1] \\ d\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} dt \\ \Rightarrow \int_C xy \, dx + z \, dy + ye^z \, dz &= \int_0^1 (t \cdot 2t \, dt + 3t \cdot 2 \, dt + 2t e^{3t} \cdot 3 \, dt) \\ &= \int_0^1 (2t^2 + 6t + 6te^{3t}) \, dt \\ &= \left. \frac{2}{3}t^3 + 3t^2 + 2te^{3t} \right|_0^1 - \int_0^1 2e^{3t} \, dt \\ &= \frac{11}{3} + 2e^3 - \frac{2}{3}e^{3t} \Big|_0^1 = \frac{13}{3} + \frac{4}{3}e^3\end{aligned}$$

Bemerkung 6. Der entscheidende Teil bei der Berechnung von Kurvenintegralen ist die Auswahl einer passenden Parametrisierung.

2.2 Wegunabhängigkeit

Definition 2.2.1. Ein Kurvenintegral $\int_C \mathbf{V} \, d\mathbf{x}$ heißt wegunabhängig, wenn sein Wert nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve C , aber nicht vom Verlauf der Kurve abhängt.

Bemerkung 7. Das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{V} dx$ ist wegunabhängig genau dann, wenn $\oint_G \mathbf{V} dx$ über jede geschlossene Kurve G verschwindet (siehe Abbildung 2.3).

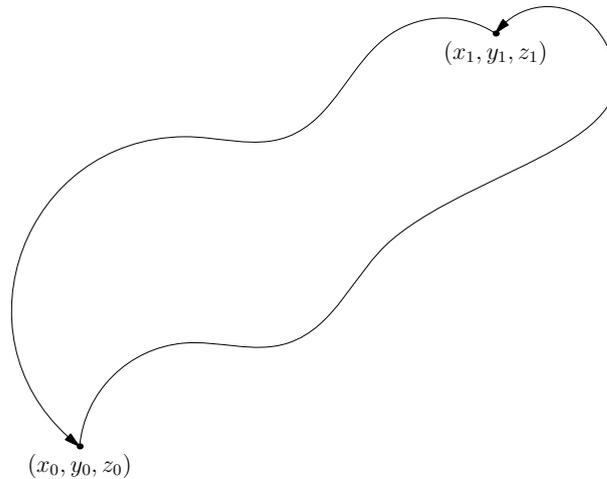


Abbildung 2.3: Wegunabhängigkeit

Wir nehmen an, dass $V = (V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z))$ ein Vektorfeld mit wegunabhängigen Kurvenintegralen sei.

Wir wählen (x_0, y_0, z_0) einen festen Anfangspunkt und setzen

$$\phi(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \mathbf{V} dx = \int_{x_0}^x V_1(t_1, y_0, z_0) dt_1 + \int_{y_0}^y V_2(x, t_2, z_0) dt_2 + \int_{z_0}^z V_3(x, y, t_3) dt_3$$

Diese Schreibweise ist durch die Wegunabhängigkeit gerechtfertigt.

Differentiation nach x , y und z ergibt dann

$$\text{grad } \phi = \mathbf{V},$$

das Vektorfeld \mathbf{V} ist also ein *Gradientenfeld*.

Das Integral $\int \mathbf{V} dx$ ist also genau dann wegunabhängig, wenn eine Funktion ϕ existiert, deren Gradient \mathbf{V} ist. Ein solches ϕ heißt eine Stammfunktion bzw. Potenzial. Wenn man ϕ gefunden hat, kann man das Kurvenintegral durch:

$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \mathbf{V} dx = \phi(x, y, z) - \phi(x_0, y_0, z_0)$$

berechnen.

Wir suchen eine Bedingung dafür, dass \mathbf{V} ein Gradientenfeld ist:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$$

Durch Differenzieren der Einträge von V erhalten wir die notwendigen Bedingungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_1}{\partial y} &= \frac{\partial V_2}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial z} &= \frac{\partial V_3}{\partial y} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x} &= \frac{\partial V_1}{\partial z}\end{aligned}$$

Die folgende Schreibweise erleichtert es, sich diese Formeln zu merken

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{V} =: \text{rot } \mathbf{V} \quad \text{Rotation von } \mathbf{V}$$

Wenn \mathbf{V} ein Gradientenfeld ist, dann gilt: $\text{rot } \mathbf{V} = \vec{0} = \nabla \times \mathbf{V}$

$$\text{rot}(\text{grad } \phi) = \nabla \times (\nabla \phi) = (\nabla \times \nabla)\phi = \vec{0}$$

Später brauchen wir dann noch

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \\ \nabla_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = \text{div } \mathbf{V} \quad \text{Divergenz von } \mathbf{V} \text{ „Quelldichte“}$$

Für div und rot gilt dann

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{V}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0$$

Weiters definieren wir für später

$$\text{div}(\text{grad } \phi) = \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \Delta \phi \quad \text{Laplace Operator}$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla.$$

2.3 Oberflächenintegrale

Sei $B \in \mathbb{R}^3$ eine Fläche.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \mid (u, v) \in U \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

\mathbf{V} ist ein Vektorfeld, das wir als Strömung interpretieren. Wir wollen den Fluss des Vektorfeldes \mathbf{V} durch die orientierte Fläche B bestimmen. Die Orientierung ist durch die Wahl eines der beiden möglichen Normalvektoren bestimmt. Die Richtung des Normalvektors definiert „oben“, bzw. die „Vorderseite“ der Fläche.

Durch ein kleines Flächenstück fließt etwa

$$\langle \mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle \cdot \text{Fläche.}$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ den Normalvektor auf B im Punkt $\mathbf{x} \in B$.

Parametrisierung der Fläche B (siehe Abbildung 2.4):

$$\begin{aligned} \phi : U &\rightarrow B, \quad U \subseteq \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

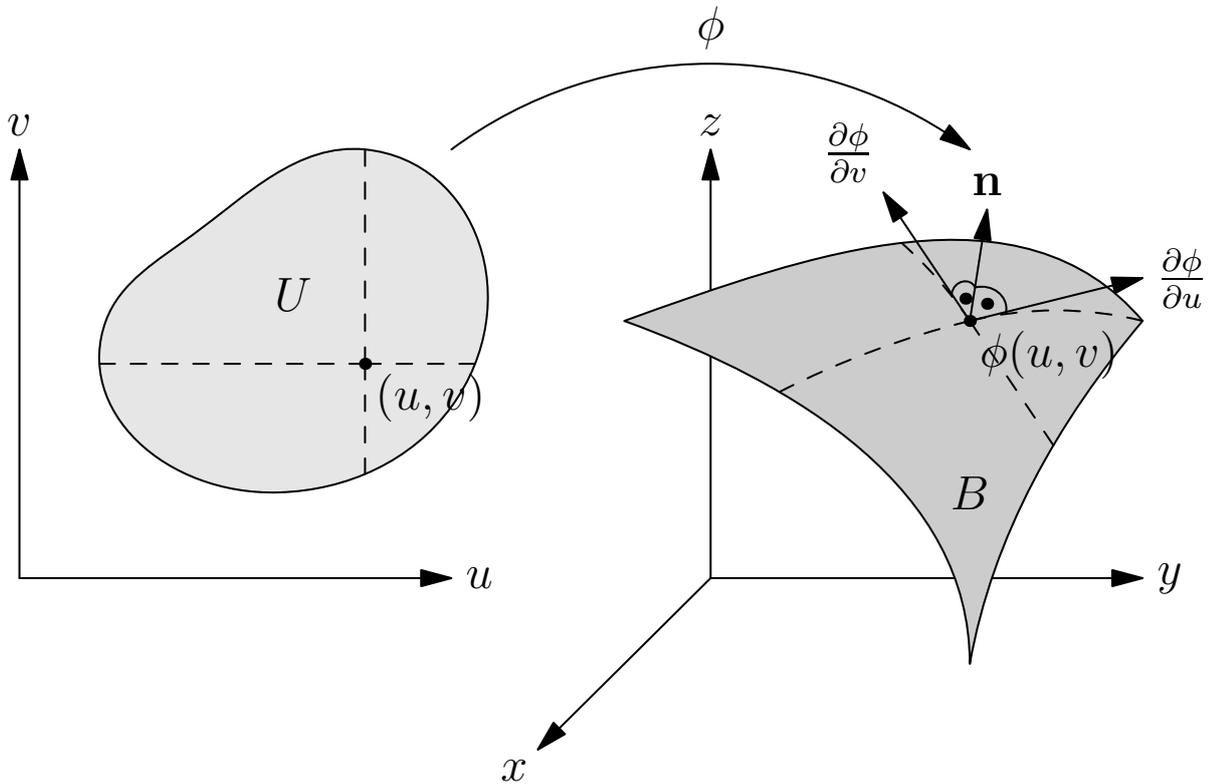


Abbildung 2.4: Parametrisierung einer Fläche im \mathbb{R}^3

Damit haben wir

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\phi(u, v)).$$

Der Normalvektor \mathbf{n} ist das Vektorprodukt von Tangentialvektoren:

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|}.$$

Das unbestimmte Vorzeichen \pm deutet an, dass der *richtig orientierte* (zur Orientierung der Fläche passende) Normalvektor zu wählen ist.

$$\langle \mathbf{V}, \mathbf{n} \rangle \cdot \text{Fläche} = \left\langle \mathbf{V}(\phi(u, v)), \pm \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|} \right\rangle \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du dv$$

Fluss durch B ist :

$$\pm \iint_U \left\langle \mathbf{V}(\phi(u, v)), \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle du dv$$

Bemerkung 8. Der Wert des Integrals hängt nur vom Vektorfeld und der orientierten Fläche, aber nicht von der Parametrisierung ab.

Dies rechtfertigt die Schreibweisen

$$\iint_B \langle \mathbf{V}, \mathbf{n} \rangle d\mathbf{o} = \iint_B \mathbf{V} \cdot d\mathbf{o} = \iint_B V_1 dy \wedge dz + V_2 dz \wedge dx + V_3 dx \wedge dy,$$

wobei

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

Dabei nennt man $d\mathbf{o} = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| du dv$ das skalare Oberflächenelement. $d\mathbf{o} = \mathbf{n} \cdot d\mathbf{o}$ heißt das vektorielle Oberflächenelement.

Beispiel 12. Sei

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

so orientiert, dass der Normalvektor positive z -Koordinaten hat. Wir wollen dann

$$\iint_B x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy = ?$$

berechnen.

Wir benötigen dazu eine Parametrisierung für B :

$$\phi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}; 0 \leq u \leq 2\pi; 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{nur Halbkugel } z \geq 0$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{o} &= \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} du dv = \pm \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ -\sin v \end{pmatrix} du dv \\ &= \pm \begin{pmatrix} -\cos u \sin^2 v \\ -\sin u \sin^2 v \\ -\sin v \cos v \end{pmatrix} du dv \end{aligned}$$

Wir wählen dieses Vorzeichen um die richtige Orientierung zu erhalten:

$$d\mathbf{o} = \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \sin v du dv$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \iint_B \mathbf{V} d\mathbf{o} &= \int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \sin v du dv \\ &= \int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin v du dv = \int_0^{2\pi} du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v dv = 2\pi(-\cos v) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Bemerkung 9. Die Schreibweise mit \wedge deutet an, dass die Orientierung der Fläche wichtig ist:

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx; \quad \text{und} \quad dx \wedge dx = -dx \wedge dx \Rightarrow dx \wedge dx = 0$$

Diese Rechenregeln stellen sicher, dass immer die richtigen Vorzeichen gewählt werden, sofern der der Orientierung entsprechend gerichtete Normalvektor gewählt wurde.

Beispiel 13. Wir bestimmen $dy \wedge dz$ nach den Rechenregeln

$$\begin{aligned} \phi(u, v) &= \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}; \quad dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv; \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv; \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv; \\ dy \wedge dz &= \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) \\ &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} du \wedge du + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} du \wedge dv + \\ &\quad + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} dv \wedge du + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial v} dv \wedge dv \\ &= \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) du \wedge dv. \end{aligned}$$

Indem wir die Ergebnisse in das Integral $\iint v_1 dy \wedge dz + v_2 dz \wedge dx + v_3 dx \wedge dy$ einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} &\iint_B v_1 dy \wedge dz + v_2 dz \wedge dx + v_3 dx \wedge dy \\ &= \iint_V \left(v_1(\phi(u, v)) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + v_2(\phi(u, v)) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right. \\ &\quad \left. + v_3(\phi(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right) du \wedge dv. \end{aligned}$$

Wenn sichergestellt ist, dass die richtige Orientierung gewählt wurde (Normalvektor!), darf am Ende $du \wedge dv$ durch $du \, dv$ ersetzt werden. Damit sind wir bei einem gewöhnlichen Doppelintegral angelangt, das wir ausrechnen können.

2.4 Integralsätze

2.4.1 Integralsatz von Gauß in der Ebene

Kurvenintegrale in der Ebene: $\mathbf{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^2, U \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\int_C P \, dx + Q \, dy := \int_a^b (P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t)) \, dt$$

Sei $B \subseteq U$ ein Normalbereich bezüglich beider Achsen (siehe Abbildung 2.5)

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun das Kurvenintegral über den Rand von B

$$\oint_{\partial B} P dx + Q dy$$

berechnen.

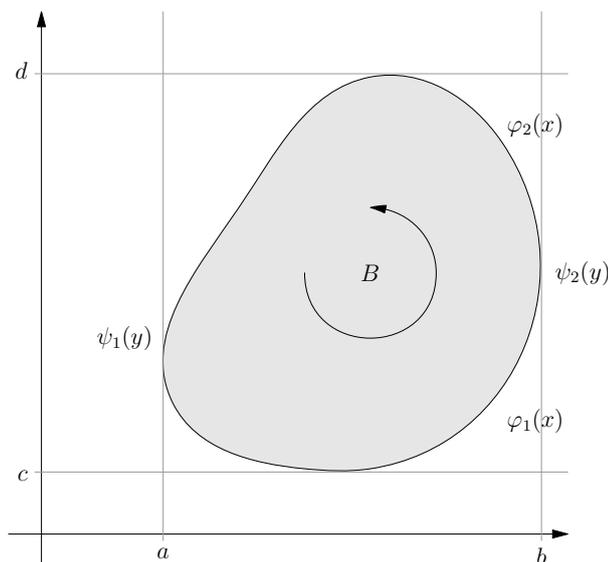


Abbildung 2.5: Der Bereich B

Wir schreiben das Kurvenintegral in ein Doppelintegral um

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B} P dx &= \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx + \int_b^a P(x, \varphi_2(x)) dx \\ &= - \int_a^b (P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))) dx \\ &= - \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx = - \iint_B \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial B} Q dy &= \int_d^c Q(\psi_1(y), y) dy + \int_c^d Q(\psi_2(y), y) dy \\
&= \int_c^d (Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)) dy \\
&= \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \\
&= \iint_B \frac{\partial Q}{\partial x} dy dx
\end{aligned}$$

Satz 2.1 (Integralsatz von GAUSS in der Ebene). Sei B eine Teilmenge der Ebene, die von einer glatten Kurve ∂B berandet wird. Seien die beiden Funktionen P und Q auf ganz B differenzierbar. Dann gilt

$$\oint_{\partial B} P dx + Q dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Beispiel 14.

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial B} (-y) dx + x dy &= \iint_B \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx dy \\
&= 2 \iint_B dx dy = 2 \cdot \text{Fläche von } B
\end{aligned}$$

Das ist die LEIBNIZsche Sektorformel

Folgerungen

Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen in der Ebene: $\int_c P dx + Q dy$ heißt wegunabhängig, wenn der Wert des Integrals nur von Anfang- und Endpunkt abhängt.

Wir wissen bereits, dass das Kurvenintegral wegunabhängig ist wenn

$$\oint_G P dx + Q dy = 0 \quad \text{für jede geschlossene Kurve } G \text{ gilt.}$$

Ebenso ist die Wegunabhängigkeit äquivalent mit der Existenz einer Stammfunktion ϕ .

Für ϕ gilt dann: $\frac{\partial \phi}{\partial x} = P$; $\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

d.h.: Wenn das Integral wegunabhängig ist, gilt:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Sei $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld auf U mit $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ dann,

$$\oint_G P dx + Q dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad \text{wenn } G = \partial B$$

Bemerkung 10. Wenn U die Eigenschaft hat, dass jede geschlossene Kurve G in U ein Gebiet berandet, dann funktioniert obiges Argument und das Kurvenintegral $\int P dx + Q dy$ ist wegunabhängig. Wenn U keine „Löcher“ hat, dann ist jede geschlossene Kurve ein Rand. Gebiete U mit dieser Eigenschaft heißen *einfach zusammenhängend*.

Satz 2.2. Sei U ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld auf U , dann ist das Kurvenintegral $\int P dx + Q dy$ genau dann wegunabhängig, wenn $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ gilt.

Beispiel 15. Auf die Voraussetzung, dass U einfach zusammenhängend ist, kann nicht verzichtet werden.

$$\oint_{x^2+y^2=1} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = ?$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{1}{x^2+y^2} + x \left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \right) = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) = -\frac{1}{x^2+y^2} - y \left(-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} \right) = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\oint_{x^2+y^2=1} -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int_0^{2\pi} \frac{((\sin t)(\sin t) + \cos t \cos t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

Das Vektorfeld \mathbf{V} ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definiert und kann nicht in $(0,0)$ fortgesetzt werden.

Fluss eines Vektorfeldes durch eine Kurve (im \mathbb{R}^2)

$$\int \langle \mathbf{V}, \mathbf{n} \rangle ds; \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}; \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt; \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad t \in [a, b]$$

$$\int_a^b \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_a^b (-Q\dot{x} + P\dot{y}) dt = \int_C -Q dx + P dy$$

Nach dem Integralsatz von Gauß gilt dann

$$\oint_{\partial B} -Q dx + P dy = \iint_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial(-Q)}{\partial y} \right) dx dy$$

Bemerkung 11. Der Fluss von \mathbf{V} durch den Rand von B kann also als das Integral über eine „Quelldichte“ geschrieben werden:

$$\oint_{\partial B} -Q dx + P dy = \iint_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

2.4.2 Integralsätze für Kurven- und Oberflächenintegrale im Raum

Der Integralsatz von Stokes

Sei B ein Flächenstück im Raum und

$$\phi : (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung von B . Wir wollen nun

$$\oint_{\partial B} P dx + Q dy + R dz$$

als ein Kurvenintegral in (u, v) umschreiben und den Integralsatz von Gauß anwenden, um einen entsprechenden Integralsatz für Kurvenintegrale im Raum zu erhalten. Es gilt dann

$$\oint_{\partial B} P dx = \oint_C (P \circ \phi) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)$$

wegen

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv.$$

Nach dem Integralsatz von Gauß erhalten wir

$$\begin{aligned} \oint_C (P \circ \phi) \frac{\partial x}{\partial u} du + (P \circ \phi) \frac{\partial x}{\partial v} dv = \\ \iint_{\phi^{-1}(B)} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left((P \circ \phi) \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left((P \circ \phi) \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] du dv, \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left((P \circ \phi) \frac{\partial x}{\partial v} \right) &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \circ \phi \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial}{\partial v} \left((P \circ \phi) \frac{\partial x}{\partial u} \right) &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + P \circ \phi \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \end{aligned}$$

Der Integrand des Doppelintegrals lässt sich dann als

$$\frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right)$$

schreiben (der erste Summand ist 0). Insgesamt erhalten wir

$$\oint_{\partial B} P dx = \iint_{\phi^{-1}(B)} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right) du dv$$

und (unter Verwendung der \wedge -Schreibweise)

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B} P dx &= \iint_B \left(-\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \right) \\ \oint_{\partial B} Q dy &= \iint_B \left(-\frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \right) \\ \oint_{\partial B} R dz &= \iint_B \left(-\frac{\partial R}{\partial x} dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz \right). \end{aligned}$$

Durch Zusammenfassen ergibt sich

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B} P dx + Q dy + R dz \\ = \iint_B \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx. \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass in diesem Oberflächenintegral genau die Koordinaten von $\text{rot } \mathbf{V}$ vorkommen.

Satz 2.3 (Integralsatz von STOKES). *Sei \mathbf{V} ein Vektorfeld auf $O \subseteq \mathbb{R}^3$, B eine Fläche in O und ∂B ihr Rand. Dann gilt:*

$$\oint_{\partial B} \mathbf{V} ds = \iint_B (\text{rot } \mathbf{V}) d\mathbf{o}$$

Dabei ist der Normalvektor auf B so zu wählen, dass bei Umlaufen der Kurve ∂B das Innere zur Linken liegt (Links ist durch den Normalvektor definiert), wie in Abbildung 2.5.

Bemerkung 12. $\int \mathbf{V} ds$ ist wegunabhängig $\Leftrightarrow \oint_G \mathbf{V} ds = 0$ für alle geschlossenen Kurven $G \Rightarrow \text{rot } \mathbf{V} = \vec{0}$. Wenn der Definitionsbereich von \mathbf{V} so beschaffen ist, dass jede geschlossene Kurve eine Fläche berandet, dann gilt auch die Umkehrung.

Der Integralsatz von Gauß im Raum

Sei \mathbf{V} ein Vektorfeld auf $O \subseteq \mathbb{R}^3$, $U \subseteq O$ - ein Volumen, ∂U Rand von U (eine geschlossene Fläche).

Analog zum Integralsatz von Gauß in der Ebene suchen wir eine Gleichung der Form

$$\oint_{\partial U} \mathbf{V} d\mathbf{o} = \iiint_U \text{Quelldichte } dx dy dz$$

Wir wollen die Quelldichte durch einen Grenzübergang bestimmen:

$$\begin{aligned} \text{Quelldichte}(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}(B((x_0, y_0, z_0), r))} \iiint_{B((x_0, y_0, z_0), r)} \text{Quelldichte } dx dy dz \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4\pi r^3}{3}} \oint_{\partial B((x_0, y_0, z_0), r)} \mathbf{V} d\mathbf{o} \end{aligned}$$

$$\oint_{\partial B((x_0, y_0, z_0), r)} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

$$x = r \cos(\varphi) \sin(\theta) + x_0$$

$$y = r \sin(\varphi) \sin(\theta) + y_0$$

$$z = r \cos(\theta) + z_0$$

Damit ergibt sich

$$d\mathbf{o} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ -r \sin(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} d\theta d\varphi = \begin{pmatrix} r^2 \cos(\varphi) \sin(\theta)^2 \\ r^2 \sin(\varphi) \sin(\theta)^2 \\ r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \end{pmatrix} d\theta d\varphi.$$

Die Koordinaten des Vektorfeldes ersetzen wir durch ihre erste Näherung

$$P(x, y, z) = P(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial P}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) + \text{Rest}$$

und setzen dies in das Integral ein

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial B} P \, dy \wedge dz \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(P(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)r \cos(\varphi) \sin(\theta) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)r \sin(\varphi) \sin(\theta) + \frac{\partial P}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)r \cos(\theta) + \text{Rest} \right) \cdot r^2 \cos(\varphi) \sin(\theta)^2 \, d\theta \, d\varphi. \end{aligned}$$

Weil $\int_0^{2\pi} \cos(\varphi) \, d\varphi = 0$ und $\int_0^{2\pi} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \, d\varphi = 0$ verschwinden die Integrale über alle Terme bis auf den zweiten. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint_{\partial B} P \, dy \wedge dz &= r^3 \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cos^2(\varphi) \sin^3(\theta) \, d\theta \, d\varphi + \text{Rest} \\ &= r^3 \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2(\theta)) \sin(\theta) \, d\theta + \text{Rest} \\ &= \frac{4\pi r^3}{3} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \text{Rest} \end{aligned}$$

und daher

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi r^3} \iint_{\partial B} P \, dy \wedge dz = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0, z_0),$$

weil

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Rest}}{r^3} = 0$$

gilt.

Dies gilt analog auch für $\iint_{\partial B} Q \, dz \wedge dx$ und $\iint_{\partial B} R \, dx \wedge dy$. Damit erhalten wir

$$\text{Quelldichte} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \mathbf{V}.$$

Satz 2.4 (Integralsatz von Gauß im Raum). *Sei U eine Teilmenge von \mathbb{R}^3 , die von der glatten Fläche ∂U berandet wird, und sei das Vektorfeld \mathbf{V} auf ganz U differenzierbar. Dann gilt*

$$\iint_{\partial U} \mathbf{V} \, d\mathbf{o} = \iiint_U \text{div } \mathbf{V} \, dx \, dy \, dz.$$

Dabei ist ∂U so orientiert, dass der Normalvektor nach außen zeigt.

Bemerkung 13. Die Integralsätze von Gauß und Stokes motivieren folgende Definitionen:

- Ein Vektorfeld \mathbf{V} heißt *wirbelfrei*, wenn die Rotation Null ist
- Ein Vektorfeld \mathbf{V} heißt *quellenfrei* wenn die Divergenz Null ist

$$\Leftrightarrow \oint_{\gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{o} = 0 \quad \text{für jede geschlossene Fläche } \gamma$$

Beispiel 16. Das folgende Beispiel zeigt, dass der Integralsatz von Gauß nur richtig ist, wenn der Definitionsbereich von \mathbf{V} keine „Löcher“ hat, also jede geschlossene Fläche tatsächlich ein Gebiet berandet. Wir bestimmen das Oberflächenintegral des Vektorfeldes

$$\mathbf{V} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

über die Oberfläche der Kugel mit Radius R um den Ursprung. Dies ergibt mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \sin \theta \\ R \sin \varphi \sin \theta \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d\mathbf{o} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \sin \theta \\ R \sin \varphi \sin \theta \\ R \cos \theta \end{pmatrix} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$\oint_{\partial B(0,R)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{o} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} R \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi \neq 0.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{V} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2) + 3(-x^2 - y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0, \end{aligned}$$

wodurch das Volumenintegral natürlich verschwindet (vergleiche mit Beispiel 15).

Kapitel 3

Differentialgleichungen

Viele physikalische und technische Vorgänge lassen sich durch Gleichungen der Form

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3.1)$$

beschreiben. Solche Gleichungen heißen Differentialgleichungen. Dabei ist x die unabhängige Variable und y eine entsprechend oft differenzierbare Funktion von x , die abhängige Variable. F ist ein Ausdruck, der eine Beziehung zwischen x , y und den Ableitungen von y herstellt. Die Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung heißt die Ordnung der Differentialgleichung.

Unter Verwendung des Hauptsatzes über implizite Funktionen (Analysis T1) kann die Gleichung (3.1) auch in der Form

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (3.2)$$

geschrieben werden. Die allgemeine Lösungstheorie von Differentialgleichungen ist schwierig, vor allem das Auffinden expliziter Ausdrücke für die Lösungen. Der folgende Satz gibt zumindest grundsätzlich Auskunft über die Existenz von Lösungen.

Satz 3.1. Sei $G : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen) eine stetige Funktion, die zusätzlich die Bedingung

$$|G(x, z_0, \dots, z_{n-1}) - G(x, w_0, \dots, w_{n-1})| \leq L \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\| \quad (3.3)$$

für eine feste positive reelle Zahl L und alle $x \in [a, b]$ und alle $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in U$ erfüllt. Dann gibt es zu jedem $\mathbf{z} \in U$ ein $h > 0$ und eine n -mal differenzierbare Funktion $y : [a, a + h] \rightarrow \mathbb{R}$, die die Gleichungen

$$\begin{aligned} y(a) &= z_0 \\ y'(a) &= z_1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(a) &= z_{n-1} \\ y^{(n)}(x) &= G(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

erfüllt. Diese Funktion ist durch die Angabe von \mathbf{z} , also durch die Festlegung des Funktionswerts und der Werte der ersten $n - 1$ Ableitungen an der Stelle $x = a$ eindeutig bestimmt.

Die Aufgabe (3.4) nennt man Anfangswertproblem. Im Zusammenhang mit den meisten Problemen der Physik und der Technik sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, und damit ist die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems gegeben.

3.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, nämlich Differentialgleichungen erster Ordnung. Diese sind durch Gleichungen der Form

$$y' = f(x, y)$$

gegeben.

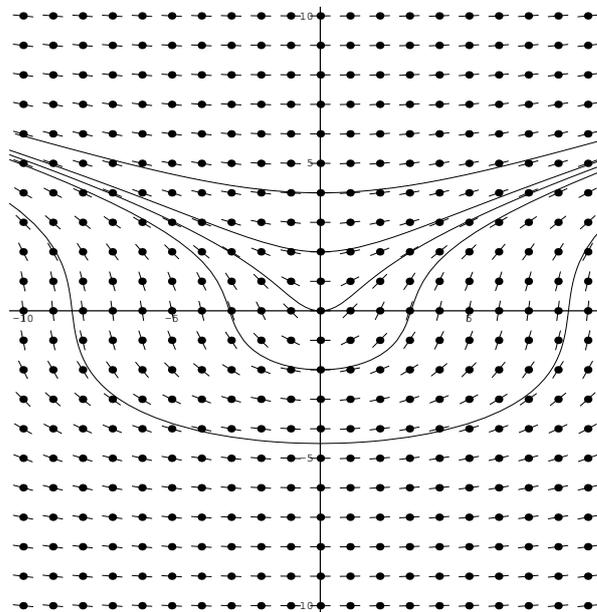


Abbildung 3.1: Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = x/(1 + y^2)$.

Eine solche Gleichung kann man derart interpretieren, dass jedem Punkt (x, y) eine Tangentensteigung zugeordnet wird, siehe Abb. 3.1. Interpretiert man die Variable x als Zeit, so ist insbesondere die zeitliche Entwicklung der Lösungsfunktion $y(x)$ für gegebenen Startwert $y(0)$ von Interesse:

Definition 3.1.1. Ein *Anfangswertproblem (AWP)* besteht aus einer DGL $y' = f(x, y)$ und einer Anfangsbedingung $y(a) = y_0$. Eine Lösung des AWP ist eine Funktion $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y(a) = y_0$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für $x \in [a, b]$.

Eine Möglichkeit zur numerischen Bestimmung einer Lösung $y(x)$ zu gegebenem $f(x, y)$ ist das sogenannte *Euler-Verfahren (Euler-Polygon)*. Sei dazu

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(a) &= y_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

für einen Anfangszeitpunkt a gegeben. Folgt man nun ausgehend vom Anfangswert der Tangente in y_0 mit Steigung $f(a, y_0)$ ein kleines Stück bis $x = a + h$, so erhält man

$$y_1 = \tilde{y}(a + h) = y_0 + h \cdot f(a, y_0) , \tag{3.6}$$

was eine erste Näherung für den tatsächlichen Wert $y(a + h)$ darstellt. Durch Taylorentwicklung ergibt sich $\tilde{y}(a + h) - y(a + h) = O(h^2)$, wobei $a = x_0$ und $a + h = x_1$ gesetzt wird. Dadurch erhält man einen neuen Punkt (x_1, y_1) mit einer neuen Steigung, aus der man in gleicher Weise

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) \tag{3.7}$$

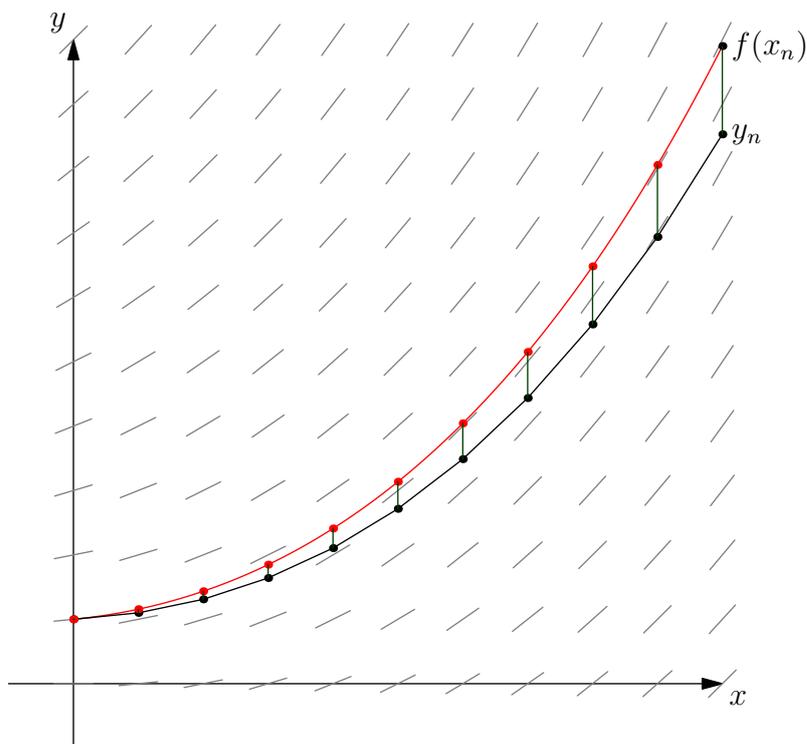


Abbildung 3.2: Euler-Verfahren

bestimmen kann. Allgemein erhalten wir

$$\begin{aligned}
 y' &= f(x, y), & y(x_0) &= y_0 \\
 x_0 &= a, \\
 x_n &= a + n \cdot h \\
 y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(x_n, y_n).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Durch das Näherungsverfahren entsteht natürlich ein Fehler $e_n := |y_n - y(x_n)|$ an der n -ten Stützstelle, der sich wie folgt fortpflanzt:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} - y(x_{n+1}) &= y_n + h \cdot f(x_n, y_n) - y(x_n + h) \\
 y(x_n + h) &= y(x_n) + h \cdot \underbrace{y'(x_n)}_{f(x_n, y(x_n))} + \frac{h^2}{2} \cdot y''(\xi_n) \quad (\text{Taylor}) \\
 y_{n+1} - y(x_{n+1}) &= y_n + h \cdot f(x_n, y_n) - y(x_n) - h \cdot f(x_n, y(x_n)) - \frac{h^2}{2} \cdot y''(\xi_n).
 \end{aligned}$$

Trifft man nun für $x \in [a, b]$ die Annahmen

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq K \cdot |y - z| \quad |y''(x)| \leq M,$$

so ergibt sich mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
 |y_{n+1} - y(x_{n+1})| &= e_{n+1} \leq e_n + |f(x_n, y_n) - f(x_n, y(x_n))| \cdot h + \frac{h^2}{2} \cdot M \\
 \Leftrightarrow e_{n+1} &\leq e_n + K \cdot e_n \cdot h + \frac{h^2}{2} \cdot M \\
 \Leftrightarrow e_{n+1} &\leq e_n \cdot (1 + K \cdot h) + \frac{h^2}{2} \cdot M,
 \end{aligned}$$

wobei klarerweise $e_0 = 0$ gilt.

Eine Bedingung der Form $|f(x, y) - f(x, z)| \leq K \cdot |y - z|$ für eine positive Konstante K , für festes x , aber beliebige y, z heißt Lipschitzbedingung. Anschaulich gesprochen ist diese Bedingung stärker als die Stetigkeit, aber schwächer als die Differenzierbarkeit.

Bemerkung 14. Der Fehler e_n an x_n lässt sich durch

$$e_n \leq \frac{hM}{2K} \cdot [(1 + Kh)^n - 1] \quad (3.9)$$

abschätzen.

Beweis. Als Induktionsbeginn ist $e_0 = 0 \leq 0$ erfüllt. Weiters gilt

$$\begin{aligned} e_{n+1} &\leq \frac{hM}{2K} \cdot [(1 + Kh)^n - 1] \cdot (1 + Kh) + \frac{h^2}{2} M \\ &= \frac{hM}{2K} \cdot (1 + Kh)^{n+1} - \frac{hM}{2K} - \frac{hM}{2K} \cdot Kh + \frac{h^2}{2} M \\ &= \frac{hM}{2K} \cdot [(1 + Kh)^{n+1} - 1]. \end{aligned}$$

□

Für das Intervallende $b = a + h \cdot N$ mit N Teilschritten lässt sich die Schrittweite als $\Leftrightarrow h = (b - a)/N$ schreiben. Setzt man dies in (3.9) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} e_n &\leq \frac{(b - a)M}{2KN} \cdot \left[\left(1 + K \left(\frac{b - a}{N} \right) \right)^n - 1 \right] \\ &\leq \frac{(b - a)M}{2KN} \cdot \left[\left(1 + \frac{K(b - a)}{N} \right)^N - 1 \right] \\ &\leq \frac{(b - a)M}{2KN} \cdot [e^{K(b-a)} - 1] = O(h) = O(N^{-1}). \end{aligned}$$

Der Fehler ist damit invers proportional zur Anzahl der Stützstellen.

In Abbildung 3.2 werden die tatsächliche Lösung der Differentialgleichung und das Euler-Polygon verglichen.

3.1.1 Typ 1: Getrennte Variablen

Differentialgleichungen kann man im Allgemeinen in unterschiedliche Typen einteilen, für die es Lösungsverfahren gibt. Der erste Typ beschreibt einen Lösungsweg für Differentialgleichungen folgender Form:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{f(x)}{g(y)} \quad (3.10)$$

Dies lässt sich umformen auf

$$g(y)dy = f(x)dx. \quad (3.11)$$

Durch Integration auf beiden Seiten

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx \quad (3.12)$$

erhält man

$$G(y) = F(x) + C \quad (3.13)$$

wobei $G' = g$ und $F' = f$, unter der Annahme dass $g(y) \neq 0$.

Weitere Umformung ergibt

$$y(x) = G^{(-1)}(F(x) + C)$$

Durch Ableitung erhält man folgende Formel:

$$y'(x) = (G^{(-1)})'(F(x) + C) \cdot F'(x) \quad (3.14)$$

Unter Berücksichtigung der Umkehrregel

$$(G^{(-1)})'(t) = \frac{1}{G'(G^{(-1)}(t))} = \frac{1}{g(G^{(-1)}(t))}$$

ergibt sich

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y(x))}.$$

Nun wird auch die Namensgebung dieses Typs klar: Durch Trennung der Variablen und anschließende Integration erhält man relativ einfach eine Lösung. Folgendes Beispiel soll dies veranschaulichen.

Beispiel 17. Gegeben sei folgende Gleichung

$$y' = \frac{x}{1 + y^2}$$

Mit $y' = \frac{dy}{dx}$ sieht man, dass dies umformbar ist auf

$$(1 + y^2)dy = xdx$$

Integration auf beiden Seiten liefert

$$y + \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C$$

womit die Lösung auch gefunden ist. Man kann dies noch umformen auf

$$x = \pm \sqrt{2y + \frac{2y^3}{3} + C} = x(y)$$

Nach $y(x)$ umzuformen wäre recht aufwändig (kubische Gleichung lösen).

3.1.2 Typ 2: exakte DGL

Eine weiterer Typ von Differentialgleichungen sind die "exakten Differentialgleichungen", welche folgende Form aufweisen:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (3.15)$$

was wir als

$$y' = f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

interpretieren.

Wenn nun $Pdx + Qdy$ ein Differential einer Funktion Φ ist, was gleichbedeutend damit ist, dass das zugehörige Kurvenintegral wegunabhängig ist, dann können wir $d\Phi = Pdx + Qdy$ schreiben. Wir wissen aus der Kapitel 2.2, dass dies aus der Gültigkeit der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

folgt. In diesem Fall heißt die Differentialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ *exakt*.

Wenn also $Pdx + Qdy$ das Differential der Funktion Φ ist, dann beschreibt die Gleichung $Pdx + Qdy = d\Phi = 0$ genau die Niveaulinien von Φ ; diese sind dann die Lösungen der Differentialgleichung. Für ein Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad y(x_0) = y_0$$

erhalten wir dann die Lösung $\Phi(x, y(x)) = \Phi(x_0, y_0)$.

Beispiel 18. Gegeben sei

$$y' = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Umformung ergibt

$$(x^2 + y^2)dy = -2xydx$$

Nun werden die Integrabilitätsbedingungen überprüft:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(2xy)}{\partial y} &= 2x \\ \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x} &= 2x \end{aligned}$$

Diese sind also erfüllt. Nun wählt man entweder $P(x, y)$ und integriert nach x oder $Q(x, y)$ und integriert nach y , um die Stammfunktion $\Phi(x, y)$ zu erhalten. In diesem Beispiel wird P gewählt:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2xy \\ \Phi(x, y) &= \int Pdx = x^2y + C(y) \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt soll C bestimmt werden. Dazu leitet man nach der jeweils anderen Variable ab (hier y) und vergleicht das Ergebnis mit $Q(x, y)$.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = x^2 + C'(y)$$

Man sieht, dass für eine Übereinstimmung $C'(y)$ mit y^2 ersetzt werden muss:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= x^2 + C'(y) \\ Q &= x^2 + y^2\end{aligned}$$

Damit weiß man, dass $C(y)$ folgendermaßen aussehen muss:

$$C'(y) = y^2 \Rightarrow C(y) = \frac{y^3}{3} + D$$

Schlussendlich kann man die Stammfunktion anschreiben:

$$\Phi(x, y) = x^2 y + \frac{y^3}{3}$$

Die Lösungen dazu lauten $x^2 y + \frac{y^3}{3} = C$.

3.1.3 Typ 3: Lineare DGL

Dieser Typ hat die Form

$$y' = a(x)y \tag{3.16}$$

wobei y nur linear vorkommt und a stetig ist. Wenn $y_1(x)$ eine Lösung ist, dann ist auch $C \cdot y_1(x)$ eine Lösung:

$$|a(x)y - a(x)z| \leq \underbrace{\max |a(x)|}_K \cdot |y - z|$$

Damit ist die Bedingung für die Eindeutigkeit erfüllt - es handelt sich hier um einen Sonderfall von DGL getrennter Variablen (wobei a stetig auf einem Intervall ist).

Jedes AWP $y' = ay$, $y(x_0) = y_0$ hat eine eindeutig bestimmte Lösung. Für $y(x_0) = 0$ ist diese Lösung die Lösung $y(x) \equiv 0$. Wenn also eine Lösung y den Wert 0 annimmt, muss sie gleich der Nulllösung sein.

Hier der allgemeine Ansatz für das Lösen eines Anfangswertproblems, für $y \neq 0$:

$$\frac{y'}{y} = a(x) \Rightarrow \ln |y(x)| = \int a(x) dx + C$$

Indem wir $C = 0$ setzen, haben wir damit eine Lösung gefunden

$$y(x) = \exp \left(\int_{x_0}^x a(\xi) d\xi \right).$$

Alle anderen Lösungen sind nach den vorherigen Überlegungen Vielfache $Cy(x)$ dieser Lösung. Die Lösung des Anfangswertproblems $y' = a(x)y$ mit $y(x_0) = y_0$ lautet also:

$$y(x) = y_0 \exp \left(\int_{x_0}^x a(\xi) d\xi \right)$$

Beispiel 19. Gegeben sei

$$y' = -xy$$

mit $y(0) = 1$.

Die Lösung lässt sich einfach anschreiben als

$$y(x) = 1 \cdot \exp \left(\int_0^x (-\xi) d\xi \right) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

3.1.4 Typ 4: inhomogene lineare Differentialgleichungen

Bei diesem Typ ist zusätzlich noch ein Term $b(x) \neq 0$ (die *Inhomogenität*) vorhanden:

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (3.17)$$

wobei a und b stetig auf einem Intervall sind.

Wenn wir eine Lösung y_p von Gleichung (3.17) haben und eine Lösung y_h der Gleichung $y' = a(x)y$, dann ist $y(x) = y_p(x) + \lambda y_h(x)$ auch eine Lösung der Gleichung (3.17):

$$\begin{aligned} y' &= y'_p + \lambda y'_h = a(x)y_p + b(x) + \lambda a(x)y_h \\ &= a(x) \underbrace{(y_p + \lambda y_h)}_y + b(x) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Weil wir λ jedem AWP anpassen können, haben wir damit alle Lösungen von Gleichung (3.17) bestimmt.

Sei $y_h(x) = \exp(\int a(x)dx)$ eine Lösung der homogenen Gleichung $y' = a(x)y$. Dann machen wir folgenden Ansatz für die *partikuläre Lösung* y_p der inhomogenen Gleichung:

$$y_p = C(x)y_h(x) \quad (3.19)$$

$$y'_p = C'y_h + Cy'_h. \quad (3.20)$$

Wir setzen in Gleichung (3.17) ein:

$$C'y_h + \underbrace{Cy'_h}_{Ca(x)y_h} = a(x)Cy_h + b(x). \quad (3.21)$$

Daraus können wir C' bestimmen und damit C

$$\begin{aligned} C' &= \frac{b(x)}{y_h(x)} \\ C(x) &= \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx. \end{aligned}$$

Dies eingesetzt in $y_p = C \cdot y_h$ ergibt:

$$y_p(x) = y_h(x) \cdot \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx.$$

Insgesamt ergibt sich damit die Lösung

$$y(x) = y_h(x) \cdot \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx + \lambda y_h(x).$$

Weil die Konstante C aus der Lösung der homogenen Gleichung im Ansatz durch eine Funktion ersetzt wird, nennt man die Methode *Variation der Konstanten*.

Die Vorgehensweise zur Lösung dieser Art von DGL soll anhand folgenden Beispiels klar werden:

Beispiel 20. Gegeben sei

$$y' = -xy + x^3$$

1. Schritt: Lösung der homogenen Gleichung:

$$y' = -xy$$

Die Lösung dieser Gleichung wurde bereits im letzten Beispiel (19) gezeigt, sie lautet:

$$y_h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2. Schritt: Nun verwendet man den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$y_p = C(x)y_h(x)$$

$$y_p = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y'_p = C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - Cxe^{-\frac{x^2}{2}}$$

Dies setzt man nun für y und y' in die Angabe ein und erhält:

$$C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - C(x)xe^{-\frac{x^2}{2}} = -C(x)xe^{-\frac{x^2}{2}} + x^3$$

Man sieht, dass sich $-C(x)xe^{-\frac{x^2}{2}}$ kürzen lässt. Damit ergibt sich C' :

$$C' = x^3e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow C(x) = \int x^3e^{\frac{x^2}{2}} dx (+D)$$

Die Integrationskonstante D können wir hier 0 setzen, da wir den Einfluss der unbestimmten Integrationskonstante später ohnehin berücksichtigen.

Im folgenden Schritt lösen wir das Integral:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \underbrace{x^2}_u \cdot \underbrace{xe^{\frac{x^2}{2}}}_{v'} dx \\ &= x^2e^{\frac{x^2}{2}} - \int 2xe^{\frac{x^2}{2}} dx \\ &= x^2e^{\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{x^2}{2}} \\ &= e^{\frac{x^2}{2}}(x^2 - 2) \end{aligned}$$

Da wir nun $C(x)$ und y_h kennen, können wir y_p bestimmen:

$$y_p = (x^2 - 2)e^{\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}} = x^2 - 2$$

3. Schritt: Die Lösung der Form $y(x) = y_p + \lambda y_h$ für die gegebene DGL lautet also:

$$y(x) = x^2 - 2 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Schritt: Für das Anfangswertproblem $y(0) = 1$ bestimmt man λ aus der Anfangsbedingung

$$y(0) = y_p(0) + \lambda y_h(0) = -2 + \lambda = 1$$

woraus sich $\lambda = 3$ ergibt.

Schlussendlich setzt man λ in die Lösung ein und erhält für das AWP:

$$y(x) = x^2 - 2 + 3e^{-\frac{x^2}{2}}$$

3.2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Viele Probleme lassen sich durch besonders einfache Differentialgleichungen beschreiben. Bei diesen ist die Funktion G in (3.2) linear in den Variablen $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ und (zuerst einmal) unabhängig von x .

Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0 \quad a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R} \quad \textit{konstant} \quad (3.22)$$

heißt lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Für diese Gleichung ist die Bedingung (3.3) offenbar erfüllt. Wegen der Unabhängigkeit von x können wir den Startwert der Einfachheit halber $x = 0$ wählen. Indem wir die Anfangswertprobleme

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} = \vec{e}_k$$

für (3.22) lösen, erhalten wir n linear unabhängige Lösungen y_1, \dots, y_n , aus denen sich wegen der Linearität von (3.22) alle Lösungen durch Linearkombination darstellen lassen:

$$y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \dots + \lambda_n y_n(x). \quad (3.23)$$

Grundsätzlich genügt es also n linear unabhängige Lösungen der Gleichung (3.22) zu finden; aus diesen können alle Lösungen (und damit die Lösungen aller Anfangswertprobleme) linear kombiniert werden.

Zur Bestimmung dieser *Grundlösungen* verwenden wir eine einfache **Ansatzmethode**: wir setzen Lösungen in der Form

$$y(x) = e^{\lambda x} \quad (3.24)$$

$$y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x} \quad (3.25)$$

an und erhalten die Gleichung

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_0 e^{\lambda x} = 0$$

bzw. nach Kürzung mit $e^{\lambda x}$

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Diese Gleichung heißt die charakteristische Gleichung (bzw. das charakteristische Polynom) zur Differentialgleichung (3.22).

Man hat nun ein Polynom in λ vom Grad n vorliegen. Diese Gleichung hat demnach n Lösungen, wenn man mehrfache Nullstellen entsprechend mehrfach zählt.

Wenn alle Lösungen der charakteristischen Gleichung verschieden sind, dann haben wir n linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung gefunden. Wenn Lösungen mehrfach auftreten, dann müssen wir noch weitere Lösungen finden. Das soll nun geschehen: seien mehrfache Lösungen der charakteristischen Gleichung vorhanden

$$\underbrace{\lambda_1}_{n_1\text{-mal}}, \underbrace{\lambda_2}_{n_2\text{-mal}}, \dots, \underbrace{\lambda_r}_{n_r\text{-mal}} \cdot \\ (n_1 + n_2 + \dots + n_r = n)$$

Wir haben bereits folgende Lösungen:

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_r x}.$$

Um weitere Lösungen zu finden, versuchen wir folgendes:

$$\left(\left(\frac{d}{dx} \right)^n + a_{n-1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-1} + \dots + a_0 \right) e^{zx} = \underbrace{(z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0)}_{p(z)} e^{zx}$$

Wenden wir nun die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial z}$ an, so folgt

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^n + a_{n-1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-1} + \dots + a_0 \right) \frac{\partial}{\partial z} e^{zx} \\ &= \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^n + a_{n-1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-1} + \dots + a_0 \right) x e^{zx} \\ &= (p'(z) + p(z)x) e^{zx} \end{aligned}$$

Wenn wir nun für

$$\begin{aligned} z &= \lambda_1 \\ p(\lambda_1) &= 0 \\ p'(\lambda_1) &= 0 \end{aligned}$$

einsetzen, erhalten wir, dass auch $x e^{\lambda_1 x}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Damit erhalten wir n verschiedene (linear unabhängige) Lösungen:

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{n_1-1} e^{\lambda_1 x}, \\ & e^{\lambda_2 x}, x e^{\lambda_2 x}, \dots, x^{n_2-1} e^{\lambda_2 x}, \\ & \vdots \\ & e^{\lambda_r x}, x e^{\lambda_r x}, \dots, x^{n_r-1} e^{\lambda_r x}. \end{aligned}$$

Definition 3.2.1. Wenn die Vielfachheit der Lösung λ der charakteristischen Gleichung > 1 ist, dann sagen wir, dass bei λ **innere Resonanz** vorliegt.

Beispiel 21. Gegeben sei

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

wobei sich die Gleichung

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3$$

ergibt. Nun löst man diese Gleichung und erhält

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -2 \pm \sqrt{4-3} \\ \lambda_1 &= -3 \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

dies setzt man einfach in den Lösungsansatz ein:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-x} \\ y_2 &= e^{-3x} \end{aligned}$$

und für die allgemeine Lösung erhält man

$$y(x) = A \cdot e^{-x} + B \cdot e^{-3x}$$

Dies ist der einfachste Fall, da keine innere Resonanz vorhanden ist.

Beispiel 22. Gegeben sei

$$y'' + 2y' + y = 0$$

womit man folgende Gleichung erhält:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

Die Lösungen für λ lauten

$$\lambda_{1,2} = -1$$

Nun liegt eine doppelte Nullstelle vor, es gibt hier also innere Resonanz!

Damit lauten die Lösungen für y

$$y_1 = e^{-x}$$

$$y_2 = xe^{-x}$$

und die allgemeine Lösung

$$y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$$

Beispiel 23. Gegeben sei

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

und damit

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$$

λ ergibt sich dadurch zu

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i$$

Im Fall komplexer Lösungen treten diese immer paarweise als konjugiert komplexe Werte auf. Die Lösungen für y lauten

$$y_1(x) = e^{-2x} e^{ix}$$

$$y_2(x) = e^{-2x} e^{-ix}$$

welche man mit

$$e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i \sin(x)$$

auch anschreiben kann als

$$y_1(x) = e^{-2x} (\cos(x) + i \sin(x))$$

$$y_2(x) = e^{-2x} (\cos(x) - i \sin(x)).$$

Um komplexe Lösungen für y zu vermeiden, addiert bzw. subtrahiert man diese beiden Lösungen und erhält neue, reellwertige Lösungen:

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{-2x} \cdot \cos(x)$$

$$\frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{-2x} \cdot \sin(x)$$

Die allgemeine Lösung lautet nun

$$y(x) = (A \cos(x) + B \sin(x))e^{-2x}$$

Wichtig ist, dass die allgemeine Lösung niemals komplexe Werte enthalten darf, man muss immer auf reellwertige Lösungen umformen!

Beispiel 24. Gegeben sei

$$y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$$

Dies ergibt

$$p(z) = z^4 + 4z^2 + 4 = (z^2 + 2)^2$$

und damit

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= i\sqrt{2} \\ \lambda_{3,4} &= -i\sqrt{2}\end{aligned}$$

Damit erhält man 2 Lösungen mit jeweils innerer Resonanz. Diese lauten demnach

$$\begin{aligned}\cos(x\sqrt{2}) \\ \sin(x\sqrt{2}) \\ x \cos(x\sqrt{2}) \\ x \sin(x\sqrt{2})\end{aligned}$$

Man erkennt an diesem Beispiel gut, wieso eine doppelte Nullstelle als innere Resonanz bezeichnet wird: für $\cos(x\sqrt{2})$, $\sin(x\sqrt{2})$ erhält man eine Schwingung mit konstanter Amplitude, für $x \cos(x\sqrt{2})$, $x \sin(x\sqrt{2})$ erhält man Schwingungen, deren Amplitude mit x wächst.

Beispiel 25. Gegeben sei

$$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 6y^{(2)} + 4y' + y = 0$$

und daher

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1 = (\lambda + 1)^4$$

und

$$\lambda_{1,2,3,4} = -1$$

Hier liegt eine vierfache Nullstelle vor, damit ergibt sich dreifache innere Resonanz. Die Lösungen lauten dann

$$\begin{aligned}y_1 &= e^{-x} \\ y_2 &= xe^{-x} \\ y_3 &= x^2e^{-x} \\ y_4 &= x^3e^{-x}\end{aligned}$$

3.3 Inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Wir wollen nun auch noch eine Abhängigkeit von der Variablen x zulassen, indem wir auf der rechten Seite von (3.22) statt 0 eine Funktion von x schreiben. Diese kann als äußere Anregung des Systems verstanden werden.

Inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten sind von der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = s(x) \quad (3.26)$$

wobei $s(x)$ eine Funktion ist. Diese Funktion wird auch als “Störfunktion” bezeichnet.

Wie löst man nun diese inhomogene Differentialgleichung?

1. Schritt: Man löst die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (3.27)$$

2. Schritt: Man bestimmt eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Wir untersuchen hier nur Störfunktionen s , die von einer sehr speziellen Gestalt sind. In diesem Fall gibt es eine einfache Ansatzmethode, die die Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erlaubt.

Sei die Störfunktion $s(x)$ der Gestalt:

$$s(x) = e^{\lambda x} \cdot P(x) \quad (3.28)$$

$$\lambda \in \mathbb{C} \quad (3.29)$$

und P ein Polynom. Dann liefert der Ansatz

•

$$y = e^{\lambda x} \cdot Q(x) \quad (3.30)$$

wenn λ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms

•

$$y = e^{\lambda x} \cdot Q(x) \cdot x^n \quad (3.31)$$

wenn λ eine n -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung, wobei $\deg(P(x)) = \deg(Q(x))$. In diesem Fall spricht man von *äußerer Resonanz*.

Wenn die Störfunktion eine Linearkombination von Termen dieser Gestalt ist, dann lässt sich die partikuläre Lösung ebenfalls als Linearkombination der entsprechenden Ansatzterme darstellen.

Beispiel 26. Gegeben sei

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}x$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung lautet:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

womit man folgendes erhält:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$$

In diesem Fall liegt innere Resonanz bei $\lambda = -1$ vor und die Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet:

$$y_H = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$$

Die Störfunktion $s(x) = e^{-x}x$ ist von der Form

$$s(x) = e^{\lambda x} \cdot P(x)$$

mit $\lambda = -1$ und $P(x) = x$

Der Ansatz für y lautet:

$$y_p = e^{-x} \cdot (Ax + B)x^2 = e^{-x}(Ax^3 + Bx^2)$$

$$y'_p = e^{-x}(Ax^3 + Bx^2) + e^{-x}(3Ax^2 + 2Bx)$$

$$y''_p = e^{-x}(Ax^3 + Bx^2) - e^{-x}(3Ax^2 + 2Bx) - e^{-x}(3Ax^2 + Bx) + e^{-x}(6Ax + 2b)$$

Da $P(x) = x$ muss $Q(x) = (Ax + B)$, also vom selben Grad, sein. Da eine doppelte Nullstelle bei $\lambda = -1$ vorliegt und diese mit $e^{-1 \cdot x}$ in der Störfunktion vorhanden ist, multipliziert man also zum Ansatz noch x^2 .

Wieder setzt man diesen Ansatz in die gegebene Differentialgleichung ein:

$$e^{-x}(Ax^3 + Bx^2 - 3Ax^2 - 2Bx - 3Ax^2 - 2Bx + 6Ax^2 + 2B) + 2e^{-x}(-Ax^3 - Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx) + e^{-x}(Ax^3 + Bx^2) = e^{-x}x$$

Ausmultipliziert erhält man

$$Ax^3 - 2Ax^3 + Ax^3 + Bx^2 - Ax^2 - 3Ax^2 - 2Bx^2 + 6Ax^2 + Bx^2 - 2Bx + 6Ax + 4Bx + 2B = x$$

und Koeffizientenvergleich liefert

$$6Ax + 2B = x$$

$$6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$2B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Damit erhalten wir

$$y_p = e^{-x} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot x^3 + 0 \cdot x^2\right)$$

als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung und

$$y(x) = \frac{1}{6}x^3e^{-x} + Ae^{-x} + Bxe^{-x}.$$

Beispiel 27. Gegeben sei

$$y'' + 4y' + 3y = x^2 = e^{0x}x^2$$

wobei die Lösung der homogenen Gleichung

$$y_H = Ae^{-x} + Be^{-3x}$$

lautet. Ansatz für die spezielle Lösung:

$$y = e^{0x}(Ax^2 + Bx + C)x^0$$

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

$$y' = 2Ax + B$$

$$y'' = 2A$$

Da der Grad von $Q(x)$ gleich dem Grad von $P(x)$ sein muss, ergibt sich für $P(x) = x^2$ nun $Q(x) = (Ax^2 + Bx + C)$. λ ist hier 0 und damit keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

Wieder wird in die gegebene Differentialgleichung eingesetzt:

$$2A + 4(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned}x^2: \quad 3A &= 1 & \Rightarrow A &= \frac{1}{3} \\x^1: \quad 8A + 3B &= \frac{8}{3} + 3B = 0 & \Rightarrow B &= -\frac{8}{9} \\x^0: \quad 2A + 2B + 3C &= \frac{2}{3} - \frac{32}{9} + 3C = 0 & \Rightarrow C &= \frac{26}{27}\end{aligned}$$

Damit lautet die spezielle Lösung

$$y_p = \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{26}{27} = \frac{1}{27}(9x^2 - 24x + 26)$$

Die allgemeine Lösung lautet damit

$$y = y_H + y_{sp} = Ae^{-x} + Be^{-3x} + \frac{1}{27}(9x^2 - 24x + 26)$$

Beispiel 28. Gegeben sei

$$y'' + 4y = 3\sin(x) = \frac{3}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

Die homogene Differentialgleichung lautet

$$y'' + 4y = 0$$

und wegen $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ lautet die zugehörige (reelle) Lösung

$$y_H = A \cos(2x) + B \sin(2x).$$

Der Ansatz für die spezielle Lösung lautet

$$\begin{aligned}y &= A \cos(x) + B \sin(x) \\y' &= -A \sin(x) + B \cos(x) \\y'' &= -A \cos(x) - B \sin(x)\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Angabe:

$$\begin{aligned}(-A \cos(x) - B \sin(x)) + 4(A \cos(x) + B \sin(x)) &= 3 \sin(x) \\3A \cos(x) + 3B \sin(x) &= 3 \sin(x)\end{aligned}$$

mit anschließendem Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}\sin(x): \quad 3B &= 3 \Rightarrow B = 1 \\ \cos(x): \quad 3A &= 0 \Rightarrow A = 0\end{aligned}$$

Dies liefert die spezielle Lösung

$$y_p = \sin(x)$$

und schlussendlich die allgemeine Lösung

$$y = y_H + y_{sp} = A \cos(2x) + B \sin(2x) + \sin(x)$$

Wenn die Störfunktion $s(x)$ der Form $s(x) = e^{ax}(P_1(x) \cos(bx) + P_2(x) \sin(bx))$ ist, dann macht man folgenden Ansatz:

$$y = e^{ax}(Q_1(x) \cos(bx) + Q_2(x) \sin(bx))x^n \quad (3.32)$$

wobei

$$\deg(Q_1) = \deg(Q_2) = \max(\deg(P_1), \deg(P_2))$$

und n die Vielfachheit der Nullstelle $\lambda = a + ib$ des charakteristischen Polynoms ist.

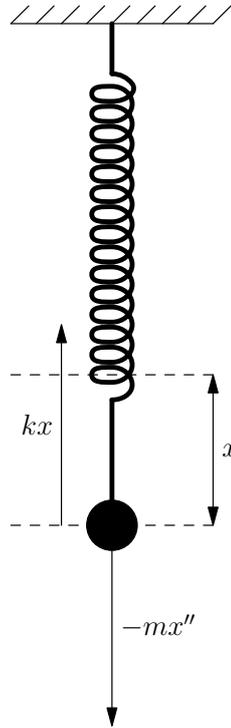


Abbildung 3.3: Federpendel

Beispiel 29. Nun soll noch ein genauer Blick auf den Fall, dass λ in der Störfunktion eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, geworfen werden:

$$y'' + \omega^2 y = \sin \vartheta x \quad (3.33)$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega \quad (3.34)$$

Die Lösung der homogenen Gleichung sieht wie folgt aus:

$$y_H = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) \quad (3.35)$$

Wir unterscheiden 2 Fälle:

- $\omega \neq \vartheta$

Der Ansatz für

$$s(x) = e^0 \sin(\vartheta x)$$

$$a = 0$$

$$b = \vartheta$$

$$\deg(P_1) = -\infty$$

$$\deg(P_2) = 0$$

lautet:

$$y = A \cos(\vartheta x) + B \sin(\vartheta x) \quad (3.36)$$

$$y' = -\vartheta A \sin(\vartheta x) + \vartheta B \cos(\vartheta x) \quad (3.37)$$

$$y'' = -\vartheta^2 A \cos(\vartheta x) - \vartheta^2 B \sin(\vartheta x) \quad (3.38)$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} (-\vartheta^2 A \cos(\vartheta x) - \vartheta^2 B \sin(\vartheta x)) + \omega^2 (A \cos(\vartheta x) + B \sin(\vartheta x)) &= \sin(\vartheta x) \\ \cos(\vartheta x)(-\vartheta^2 A + \omega^2 A) + \sin(\vartheta x)(-\vartheta^2 B + \omega^2 B) &= \sin(\vartheta x) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt zu den Lösungen für A und B :

$$\sin(\vartheta x) : \quad \omega^2 B - \vartheta^2 B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{\omega^2 - \vartheta^2} \quad (3.39)$$

$$\cos(\vartheta x) : \quad \omega^2 A - \vartheta^2 A = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (3.40)$$

Die spezielle Lösung lautet dann

$$y_{sp} = \frac{1}{\omega^2 - \vartheta^2} \sin(\vartheta x) \quad (3.41)$$

und allgemein:

$$y = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) + \frac{1}{\omega^2 - \vartheta^2} \sin(\vartheta x) \quad (3.42)$$

- $\omega = \vartheta$

Ansatz:

$$y = (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)) \cdot x \quad (3.43)$$

$$y' = x(-\omega A \sin(\omega x) + \omega B \cos(\omega x)) + (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)) \quad (3.44)$$

$$y'' = -x(\omega^2 A \cos(\omega x) + \omega^2 B \sin(\omega x)) + 2(-\omega A \sin(\omega x) + \omega B \cos(\omega x)) \quad (3.45)$$

Einsetzen in die Angabe

$$\begin{aligned} -x(\omega^2 A \cos(\omega x) + \omega^2 B \sin(\omega x)) + 2(-\omega A \sin(\omega x) + \omega B \cos(\omega x)) \\ + \omega^2 (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)) \cdot x = \sin(\omega x) \end{aligned}$$

ergibt

$$-2\omega A \sin(\omega x) + 2\omega B \cos(\omega x) = \sin(\omega x) \quad (3.46)$$

mit Koeffizientenvergleich

$$-2\omega A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2\omega} \quad \rightarrow \omega \neq 0 \quad (3.47)$$

$$2\omega B = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (3.48)$$

Die spezielle Lösung lautet

$$y_{sp} = -\frac{x}{2\omega} \cos \omega x \quad (3.49)$$

und die allgemeine Lösung ist

$$y = A \underbrace{\cos(\omega x)}_{\text{Schwingung}} + B \underbrace{\sin(\omega x)}_{\text{Schwingung}} - \underbrace{\frac{x}{2\omega}}_{\text{wachsende Amplitude}} \underbrace{\cos \omega x}_{\text{Schwingung}} \quad (3.50)$$

Der Term $\frac{x}{2\omega}$ führt also zu einer wachsenden Amplitude, wir haben also Resonanz. Umgekehrt kann für die Annäherung $\theta \rightarrow \omega$ ein Aufklingen der Amplitude der Lösung der inhomogenen Gleichung beobachtet werden.

Das wichtigste an Differentialgleichung dieser Art ist es also, den passenden Ansatz zu finden. In folgender Tabelle seien die Ansätze für unterschiedliche Störfunktionen zusammengefasst:

$s(x)$	y_{sp}
$P(x)$	$Q(x)$
$e^{\lambda x} P(x)$	$e^{\lambda x} Q(x)$
$e^{\lambda x} \cos(\omega x)$	$e^{\lambda x} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$
$e^{\lambda x} \sin(\omega x)$	$e^{\lambda x} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$
$e^{\lambda x} P(x) \cos(\omega x)$	$e^{\lambda x} (Q_1(x) \cos(\omega x) + Q_2(x) \sin(\omega x))$
$e^{\lambda x} P(x) \sin(\omega x)$	$e^{\lambda x} (Q_1(x) \cos(\omega x) + Q_2(x) \sin(\omega x))$

(3.51)

Im Fall von äußerer Resonanz gilt der Ansatz

$$y = x^n \cdot \hat{y} \quad (3.52)$$

wobei n die Vielfachheit der Nullstelle und \hat{y} der Ansatz ohne Resonanz ist.

Für eine Summe von mehreren solchen Störfunktionen setzt man die einzelnen Störungen einzeln an, findet die zugehörigen partikulären Lösungen und addiert diese (Superposition).

Beispiel 30. Gegeben sei

$$y'' - y = e^x$$

und daher

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet dann

$$y_H = Ae^x + Be^{-x}$$

und die Ableitungen sind

$$y' = \underbrace{A'}_0 e^x + Ae^x + \underbrace{B'}_0 e^{-x} - Be^{-x}$$

$$y'' = A'e^x + Ae^x - B'e^{-x} + Be^{-x}$$

Eingesetzt in die gegebene Differentialgleichung

$$A'e^x + Ae^x - B'e^{-x} + Be^{-x} - (Ae^x + Be^{-x}) = e^x$$

ergibt sich

$$A'e^x - B'e^{-x} = e^x$$

Als Nebenbedingung kennen wir aber

$$A'e^x + B'e^{-x} = 0$$

und wir können für A und B wieder die Lösung finden:

$$A = \frac{x}{2}$$
$$B = -\frac{1}{4}e^{2x}$$

Damit lautet die spezielle Lösung

$$y_{sp} = \frac{x}{2}e^x - \frac{1}{4}e^{2x}e^{-x} = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^x$$

und die allgemeine Lösung

$$y = Ae^x + Be^{-x} + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^x = \hat{A}e^x + Be^{-x} + \frac{x}{2}e^x$$

Kapitel 4

Komplexe Analysis

In diesem Kapitel wollen wir die Analysis noch einmal entwickeln, diesmal aber über dem Körper der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

statt wie bisher über den reellen Zahlen. Dabei werden wir einige neue Phänomene beobachten und auch vieles aus Kapitel 2 anwenden können.

Zuerst einmal bemerken wir, dass wir mit dem komplexen Absolutbetrag

$$|z - w|$$

auf \mathbb{C} Abstände messen können. Konvergenz und Stetigkeit sind daher definiert.

Wir haben in Analysis T1 gesehen, dass Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

einen Konvergenzradius R besitzen. Es gibt also eine reelle Zahl R , sodass die Potenzreihe für $|x - x_0| < R$ konvergiert und für $|x - x_0| > R$ divergiert. Wir haben auch schon gesehen, dass diese Aussage auch für komplexe Werte von x richtig bleibt. Der Konvergenzradius lässt sich nach der Formel

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

bzw. durch

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

bestimmen, falls dieser Grenzwert existiert.

Bemerkung 15. Potenzreihen stellen stetige Funktionen dar und können gliedweise differenziert und integriert werden.

Beispiel 31.

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Bemerkung 16.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert in } A, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ konvergiert in } B \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n \quad \text{konvergiert in } A \cap B$$

Satz 4.1 (Identitätssatz für Potenzreihen). *Wenn zwei Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ einen gemeinsamen Konvergenzbereich haben und auf einer Menge mit Häufungspunkt x_0 übereinstimmen, dann sind die Potenzreihen identisch: $a_n = b_n \forall n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Es gelte für eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$

$$f(x_k) = g(x_k).$$

Wir müssen dann zeigen, dass $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Dazu verwenden wir Induktion: für $n = 0$ folgt dies aus der Stetigkeit der Funktionen f und g und aus $a_0 = f(x_0) = g(x_0) = b_0$. Angenommen, wir hätten die Aussage bereits für alle Koeffizienten mit Index $< n$ gezeigt. Dann betrachten wir

$$\frac{f(x) - \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{\ell}(x - x_0)^{\ell}}{(x - x_0)^n} = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell+n}(x - x_0)^{\ell}$$

und

$$\frac{g(x) - \sum_{\ell=0}^{n-1} b_{\ell}(x - x_0)^{\ell}}{(x - x_0)^n} = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell+n}(x - x_0)^{\ell}.$$

Diese beiden Funktionen stimmen nach Voraussetzung in den Punkten (x_k) überein. Weil beide Funktionen Potenzreihen sind, stimmen dann wieder die Koeffizienten von $(x - x_0)^0$ überein, also $a_n = b_n$. \square

4.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Definition 4.1.1. f ist differenzierbar in z_0 wenn

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert.

Wir wollen uns ansehen, was diese Definition für den Real- und Imaginärteil von $f(z)$ bedeutet

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

$$\begin{aligned} f'(x_0 + iy_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} = -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir durch Vergleich von Real- und Imaginärteil die Cauchy-Riemann Gleichungen

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x. \quad (4.1)$$

Die Abbildung $z \mapsto f(z)$ können wir auch als Abbildung $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ interpretieren. Zu dieser Abbildung gehört die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen besagen nun, dass diese Matrix eine Drehstreckung darstellt. Dies passt zu unserer geometrischen Interpretation der komplexen Multiplikation.

Bemerkung 17. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann differenzierbar, wenn $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ reell differenzierbar ist, und die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt sind.

Beispiel 32.

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 \\ u &= x^2 - y^2, \quad v = 2xy \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \\ \left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \text{ die Funktion ist differenzierbar} \end{aligned}$$

Beispiel 33.

$$f(z) = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(x + iy) = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen sind erfüllt.

Beispiel 34.

$$\begin{aligned} f(z) = \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{\exp(ix - y) - \exp(-ix + y)}{2i} \\ &= \frac{1}{2i} (e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)) \\ &= \frac{1}{2} \sin x (e^{-y} + e^y) + \frac{i}{2} \cos x (e^y - e^{-y}) \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \\ \sin ix &= \frac{e^{i(ix)} - e^{-i(ix)}}{2i} = \frac{e^{-x} - e^x}{2i} = i \sinh x \end{aligned}$$

Definition 4.1.2. Sei U ein Gebiet und f auf U differenzierbar, dann heißt f *holomorph*¹ auf U .

$$H(U) = \{f \mid f \text{ holomorph auf } U\}.$$

Satz 4.2. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$, dann ist $f(z)$ für z mit $|z - z_0| < R$ holomorph.

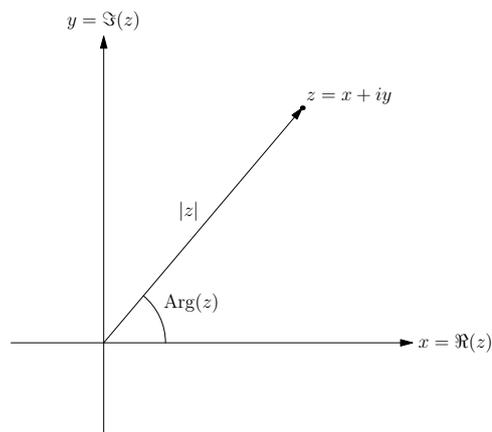


Abbildung 4.1: Betrag und Argument von z

Beispiel 35. Aus

$$z = x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = e^{\ln r} e^{i\varphi} = e^{\ln |z| + i \operatorname{Arg}(z)}$$

erhalten wir den komplexen Logarithmus

$$\log(z) := \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z)$$

$$u(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$v(x, y) = \operatorname{Arg}(z)$$

$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

$$u_x = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad v_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$u_y = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen sind erfüllt, und es gilt für $z \neq 0$

$$f'(z) = u_x + iv_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \log(x + iy) = \ln |z| + i\pi$$

$$z = x + iy, \quad x < 0, y < 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \log(x + iy) = \ln |z| - i\pi$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \log(x + iy) - \lim_{y \rightarrow 0^-} \log(x + iy) = 2\pi i$$

Die Funktion \log ist auf der negativen reellen Achse nicht stetig.

¹manchmal auch *analytisch*

4.2 Kurvenintegrale im Komplexen

Wir wollen nun die Integration von komplexen Funktionen erklären.

$$\int_C f(z) dz \quad \text{Orientierte } C \text{ Kurve.}$$

Dazu parametrisieren wir die Kurve C und erhalten

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + iy(t) \\ \dot{z}(t) &= \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) \\ dz &= \dot{z} dt = \dot{x} dt + i\dot{y} dt = dx + i dy \end{aligned}$$

Ebenso zerlegen wir $f(z(t))$ in Real- und Imaginärteil.

$$f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$$

Damit wollen wir

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u(x, y) + iv(x, y))(dx + i dy) \\ &= \int_C (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + i \int_C (v(x, y) dx + u(x, y) dy) \end{aligned}$$

Das komplexe Kurvenintegral lässt sich also rein durch zwei reelle Kurvenintegrale darstellen. Diese hängen nicht von der Parametrisierung der Kurve ab.

Bemerkung 18. Sei U einfach zusammenhängend (keine „Löcher“):
Dann erhalten wir aus dem Integralsatz von Gauß

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy) \\ &= \iint_B \underbrace{(-u_y - v_x)}_{=0 \text{ (wegen Cauchy-Riemann Dgl.)}} dx dy + i \iint_B \underbrace{(-v_y + u_x)}_{=0 \text{ (wegen Cauchy-Riemann Dgl.)}} dx dy = 0 \end{aligned}$$

Satz 4.3 (CAUCHYscher Integralsatz (CIS)). Sei U ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f eine auf U holomorphe Funktion. Dann gilt für jede geschlossene Kurve C in U :

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

Bemerkung 19. Der CIS ist äquivalent dazu, dass komplexe Kurvenintegrale wegunabhängig sind, also nur von Anfangs- und Endpunkt abhängen.

Beispiel 36. Wir wollen das Kurvenintegral

$$\oint_C \frac{dz}{z}$$

für die beiden Kurven

$$C_1 : z = e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$C_2 : z = 2 + e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$$

auswerten. Es gilt $dz = ie^{it} dt$ und nach dem CIS

$$\oint_{C_2} \frac{dz}{z} = 0,$$

weil $\frac{1}{z}$ in $B(2, \frac{3}{2})$ holomorph ist.

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it} dt}{e^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

$f(z) = \frac{1}{z}$ besitzt auf $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ eine Stammfunktion, nämlich $\log(z)$.

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z} = 2\pi i = \lim_{y \rightarrow 0^+} \log(-1 + iy) - \lim_{y \rightarrow 0^+} \log(-1 - iy).$$

Die vorher schon gefundene Unstetigkeit des Logarithmus führt also hier dazu, dass das Integral über C_1 nicht verschwindet.

Bemerkung 20. Sei C eine geschlossene Kurve und liege z_0 nicht auf C . Dann gilt

$$\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \cdot \# \text{ der Umläufe von } C \text{ um } z_0,$$

Definition 4.2.1. $\text{Ind}_C(z_0) = \text{Index von } z_0 \text{ bezüglich } C = \text{Anzahl der Umläufe von } C \text{ um den Punkt } z_0$.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z - z_0} = \text{Ind}_C(z_0)$$

Wir wollen nun die Voraussetzungen des CIS etwas abschwächen. Sei $f \in H(U \setminus \{z_0\})$ und f beschränkt auf $\{z \in U \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$. Dann berechnen wir

$$\oint_C f(z) dz.$$

Das Integral ist 0, wenn $\text{Ind}_C(z_0) = 0$ ist.

Wenn $\text{Ind}_C(z_0) \neq 0$ ist, integrieren wir über die Kurve \tilde{C} aus Abbildung 4.2 und erhalten

$$\oint_{\tilde{C}} f(z) dz = 0 = \oint_C f(z) dz + \underbrace{\int_{\leftarrow} f(z) dz + \int_{\rightarrow} f(z) dz}_{=0} - \oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz.$$

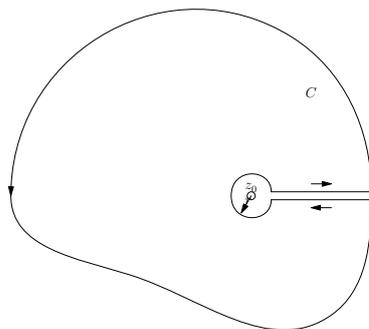


Abbildung 4.2: Die Kurve \tilde{C}

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz$$

für jedes $r > 0$. Nun benützen wir die Beschränktheit von f um z_0

$$|f(z)| \leq M \quad \text{wenn } 0 < |z - z_0| < \varepsilon$$

und schätzen das Integral ab

$$\left| \int f(z) \dot{z}(t) dt \right| \leq \int |f(z)| |\dot{z}(t)| dt \leq M \underbrace{\int |\dot{z}(t)| dt}_{\text{Bogenlänge}}$$

Somit erhalten wir

$$\left| \oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz \right| \leq 2\pi r M \quad \text{für jedes } r \in (0, \varepsilon),$$

woraus wir

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz = 0$$

schließen können. Der CIS bleibt also richtig, wenn die zu integrierende Funktion in einem Punkt nicht holomorph ist, dort aber beschränkt ist.

Sei $f \in H(U)$. Dann setzen wir

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{für } z \neq z_0 \\ f'(z) & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

Dann gilt $g \in H(U \setminus \{z_0\})$ und g bleibt in z_0 beschränkt. Nach unseren obigen Überlegungen gilt daher

$$\oint_C g(z) dz = 0 = \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Indem wir nun das Integral aufteilen, erhalten wir

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_C \frac{dz}{z - z_0} = f(z_0) 2\pi i \text{Ind}_C(z_0).$$

Diese Formel ist so wichtig für die weitere Entwicklung der Funktionentheorie, dass wir sie als Satz formulieren.

Satz 4.4 (CAUCHYsche Integralformel (CIF)). Sei U ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f \in H(U)$, C eine geschlossene Kurve in U und $z_0 \in U$ ein Punkt, der nicht auf C liegt. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \text{Ind}_C(z_0)$$

Bemerkung 21. Wenn die Funktionswerte von f auf einer Kurve bekannt sind, dann sind alle Funktionswerte in Punkten, die von der Kurve umlaufen werden, gegeben.

Nehmen wir nun an, dass $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\} \subseteq U$ gilt. Dann können wir das Integral aus der CIF umformen (für $|z - z_0| < R$)

$$\oint_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z).$$

Wegen $|z - z_0| < |\zeta - z_0| = R$ gilt dann

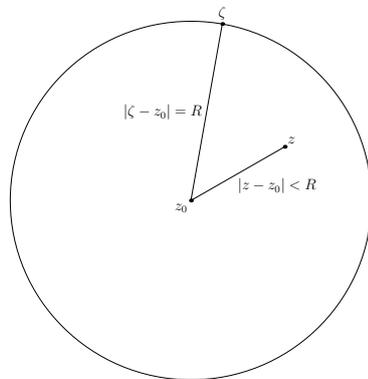


Abbildung 4.3: Der Integrationsweg

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Indem wir diese Reihe in die CIF einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = R} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \end{aligned}$$

oder

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Wir fassen zusammen

Satz 4.5. Sei $H(U)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f \in H(U)$, $z_0 \in U$ und $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\} \subseteq U$, dann lässt sich f um z_0 in eine Potenzreihe entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Potenzreihen sind beliebig oft differenzierbar, daher gilt:

Satz 4.6. Sei $f \in H(U)$, dann ist f auf U beliebig oft differenzierbar.

Wir wissen, dass die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung mit den Werten der Ableitungen zusammenhängen.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

Also gilt

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

Sei $|f(\zeta)| \leq M$ für $|\zeta - z_0| = R$. Dann können wir abschätzen

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{R^{n+1}} 2\pi R = \frac{n!M}{R^n}$$

Satz 4.7 (Cauchysche Abschätzung). Sei U ein Gebiet und $f \in H(U)$. Weiters gelte $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\} \subseteq U$. Dann gilt

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{|\zeta - z_0| = R} |f(\zeta)|.$$

Als Spezialfall ergibt sich für $n = 0$

$$|f(z_0)| \leq \max_{|\zeta - z_0| = R} |f(\zeta)|.$$

Der Betrag einer holomorphen Funktion nimmt sein Maximum also immer am Rand des Kreises an.

Definition 4.2.2. Funktionen, die auf ganz \mathbb{C} holomorph sind, heißen **ganze Funktionen**. Diese lassen sich durch Potenzreihen mit Konvergenzradius $R = \infty$ darstellen

Sei $f \in H(\mathbb{C})$. Angenommen f wäre beschränkt, also $\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq M$, dann können wir Satz 4.7 anwenden

$$|a_n| \leq \frac{1}{R^n} M \text{ für alle } R > 0 \Rightarrow a_n = 0 \text{ für alle } n > 0 \Rightarrow f(z) = a_0.$$

f ist also konstant.

Satz 4.8 (Satz von LIOUVILLE). *Beschränkte, ganze Funktionen sind konstant.*

Wir wenden diesen Satz an, um den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen.

Satz 4.9. *Sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten. Dann hat p genau n Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ und es gilt*

$$p(z) = a_n (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n).$$

Beweis. Angenommen p habe keine Nullstelle. Dann ist $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ eine ganze Funktion. Weiters gilt für $R = \max(|a_{n-1}|, \dots, |a_0|)/|a_n|$ und $|z| \geq R + 1$

$$|p(z)| \geq |a_n| |z|^n - |a_{n-1}| |z|^{n-1} - \dots - |a_0| \geq |a_n| \left(|z|^n - R \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} \right) \geq |a_n|.$$

Die Funktion f ist als stetige Funktion auf $|z| \leq R+1$ beschränkt. Nach der obigen Ungleichung ist f also auf $|z| \geq R + 1$ beschränkt, also eine beschränkte ganze Funktion, daher konstant. Damit ist auch p konstant im Widerspruch zu der Annahme, dass der Grad ≥ 1 ist.

p besitzt daher eine Nullstelle α_1 , also $p(\alpha_1) = 0$. Damit können wir den Faktor $(z - \alpha_1)$ aus p abdividieren

$$p(z) = (z - \alpha_1) p_1(z)$$

mit $\text{grad } p_1 = n - 1$. Durch Iteration des obigen Arguments können wir insgesamt n Linearfaktoren abspalten und die behauptete Darstellung erhalten. \square

Sei $f \in H(U)$, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\} \subset U$ und

$$N_f = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$$

die Menge der Nullstellen von f . Wir betrachten

$$N_f \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\},$$

also die Menge der Nullstellen in einem Kreis um z_0 . Angenommen, diese Menge wäre unendlich. Dann hätte sie einen Häufungspunkt in U , woraus wir nach dem Identitätssatz schließen könnten, dass f die Nullfunktion sein muss.

Satz 4.10. *Sei $f \in H(U)$, f nicht die Nullfunktion, dann liegen in jeder abgeschlossenen Kugel, die ganz im Definitionsbereich liegt, nur endlich viele Nullstellen.*

Sei f nicht die Nullfunktion und $f(z_0) = 0$. Dann gibt es in der Potenzreihenentwicklung von f um z_0 einen von 0 verschiedenen Koeffizienten. Sei m der kleinste Index mit $a_m \neq 0$

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m} = (z - z_0)^m h(z)$$

mit $h(z_0) = a_m \neq 0$. Die so bestimmte natürlich Zahl m nennen wir die Ordnung der Nullstelle z_0 . Schreibweise

$$\text{ord}_{z_0}(f) = m.$$

Bemerkung 22. f hat in z_0 genau dann eine Nullstelle der Ordnung m , wenn

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

4.3 Eigenschaften holomorpher Funktionen

Bemerkung 23. Wenn zwei holomorphe Funktionen f, g auf einer Kurve übereinstimmen, dann stimmen sie im ganzen Definitionsbereich überein.

4.3.1 Singularitäten

Sei G ein Gebiet, $z_0 \in G$, $f \in H(G \setminus \{z_0\})$. Die Stelle z_0 heißt dann Singularität von f .

Satz 4.11. Sei $f \in H(G \setminus \{z_0\})$ und sei f in einer Umgebung von z_0 beschränkt, dann gilt $f \in H(G)$.

Beweis. f ist beschränkt um z_0 , also gibt es $\varepsilon > 0$ und $M > 0$ mit

$$\forall z \in G, 0 < |z - z_0| < \varepsilon : |f(z)| \leq M.$$

Wir definieren

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{für } z \in G \setminus \{z_0\} \\ 0 & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

Dann gilt wegen der Beschränktheit von f

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0 = g(z_0).$$

g ist also stetig in z_0 . Weiters gilt

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)^2 f(z) - 0}{z - z_0} = (z - z_0) f(z)$$

und daher

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = 0.$$

Damit ist g auch differenzierbar in z_0 . Die neue Funktion g ist also holomorph auf ganz G und kann daher als Potenzreihe um z_0 geschrieben werden

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Nach unseren obigen Überlegungen gilt

$$a_0 = g(z_0) = 0, \quad a_1 = g'(z_0) = 0.$$

Damit können wir aus der Potenzreihe den Faktor $(z - z_0)^2$ herausheben

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2} \\ f(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2} \end{aligned}$$

und damit gilt $f \in H(U)$. □

Satz 4.12. Sei G ein Gebiet, $z_0 \in G$ mit $f \in H(G \setminus \{z_0\})$, dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

1. $f \in H(G)$ – hebbare Singularität

2. $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$, genauer: $\exists m \in \mathbb{N}, c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{C}, c_m \neq 0$ sodass

$$f(z) - \left(\frac{c_1}{z - z_0} + \dots + \frac{c_m}{(z - z_0)^m} \right)$$

in z_0 eine hebbare Singularität hat. Eine solche Singularität heißt Pol der Ordnung m

3. $\forall \varepsilon > 0$ liegt die Menge

$$\{f(z) \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$$

dicht in \mathbb{C} . Eine wesentliche Singularität.

Beweis. Angenommen der dritte Fall trete nicht ein. Dann gibt es $\varepsilon, \delta > 0$ und ein $w \in \mathbb{C}$, sodass

$$\forall z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon : |f(z) - w| > \delta.$$

Dann ist die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

in einer Umgebung von z_0 holomorph und beschränkt. Wir können also g holomorph in z_0 fortsetzen.

Nun gibt es zwei Fälle: $g(z_0) \neq 0$. Dann gilt

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$$

und f ist holomorph in z_0 . Es liegt also eine hebbare Singularität vor.

$g(z_0) = 0$. Unter unseren Voraussetzungen ist g nicht die Nullfunktion. Die Nullstelle besitzt also eine Ordnung m

$$g(z) = (z - z_0)^m h(z)$$

mit $h \in H(G)$ und $h(z) \neq 0$ in einer Umgebung von z_0 . Damit ist $1/h(z)$ holomorph um z_0 , also in eine Potenzreihe entwickelbar

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_0 = \frac{1}{h(z_0)} \neq 0.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= w + \frac{1}{(z - z_0)^m h(z)} = w + \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= w + \frac{a_0}{(z - z_0)^m} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{(z - z_0)} + \\ &\quad + \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m}}_{\text{holomorph um } z_0}. \end{aligned}$$

Es liegt also der zweite Fall des Satzes vor. □

Beispiel 37.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

Dann gilt

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$$

und daher ist f in einer Umgebung von 0 beschränkt. Der Punkt $z_0 = 0$ ist daher eine hebbare Singularität von f .

Beispiel 38. Sei

$$f(z) = \tan(z) = \frac{\sin z}{\cos z} \in H\left(\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} |f(z)| &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin z|}{|\cos z|} = \infty \\ f(z) &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - \frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!}}{-\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - \frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}} \\ \sin z &= \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - \frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!} \\ f(z) &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - \frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!}}{(z - \frac{\pi}{2}) \underbrace{\left(-\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - \frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n+1)!}\right)}_{h(z)}} \\ &= \frac{1}{z - \frac{\pi}{2}} g(z), \end{aligned}$$

wobei g holomorph um $\frac{\pi}{2}$ und $g(\frac{\pi}{2}) = -1$ ist. $\tan(z)$ hat in $z = \frac{\pi}{2}$ einen Pol erster Ordnung und $c_1 = -1$.

Beispiel 39. Sei

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Dann gilt für $w \neq 0$ und

$$z_n = \frac{1}{\log w + 2\pi i n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ und

$$f(z_n) = \exp(\log w + 2\pi i n) = w \underbrace{\exp(2\pi i n)}_{=1} = w$$

In jeder Umgebung von $z_0 = 0$ nimmt f jeden Wert $w \neq 0$ (unendlich oft) an. Damit hat f in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität.

4.4 Die Potentialgleichung

In der theoretischen Elektrotechnik tritt die Differentialgleichung

$$\Delta u = 0$$

für das elektrische Potential im ladungsfreien Raum auf. Wir wollen diese Gleichung hier in zwei Dimensionen betrachten und Ideen aus der komplexen Analysis zu ihrer Lösung verwenden.

Definition 4.4.1. Sei U ein Gebiet in \mathbb{R}^2 und $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann heißt u *harmonisch*, wenn auf U $\Delta u = 0$ gilt.

Sei f holomorph auf U (diesmal gesehen als Teilmenge von \mathbb{C}). Dann erfüllen Real- und Imaginärteil von f die Cauchy-Riemann-Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= u(x, y) + iv(x, y) \\ u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}$$

Durch nochmaliges Differenzieren (f und damit u und v sind beliebig oft differenzierbar) erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} &= v_{xy} \\ u_{yy} &= -v_{yx} \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

und ebenso $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Bemerkung 24. Die Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen sind harmonisch. Es gilt auch die Umkehrung: jede harmonische Funktion ist der Realteil einer holomorphen Funktion.

Definition 4.4.2. Sei u harmonisch auf U . Dann heißt eine Funktion $v : U \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorph auf U ist, *konjugiert harmonische* Funktion zu u . Diese ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Bemerkung 25. Sei u und v zueinander konjugiert harmonisch. Dann stehen die Niveaulinien von u senkrecht auf die Niveaulinien von v (siehe Abbildung 4.4).

Wir wollen nun zu einer gegebenen harmonischen Funktion u die konjugiert harmonische v bestimmen. Aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen sehen wir, dass die Ableitungen von v nach x und y durch die Ableitungen von u gegeben, also bekannt sind. Die Funktion v kann daraus durch Integration bestimmt werden

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_x dx + v_y dy = v(x_0, y_0) + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y dx + u_x dy.$$

Das Integral ist wegunabhängig, daher ist die Schreibweise gerechtfertigt.

Wir wollen diese Methode anhand eines Beispiels vorzeigen:

Beispiel 40.

$$u(x, y) = e^x(x \cos(y) - (y + 1) \sin(y))$$

Diese Funktion ist harmonisch durch Berechnung der zweiten Ableitungen.

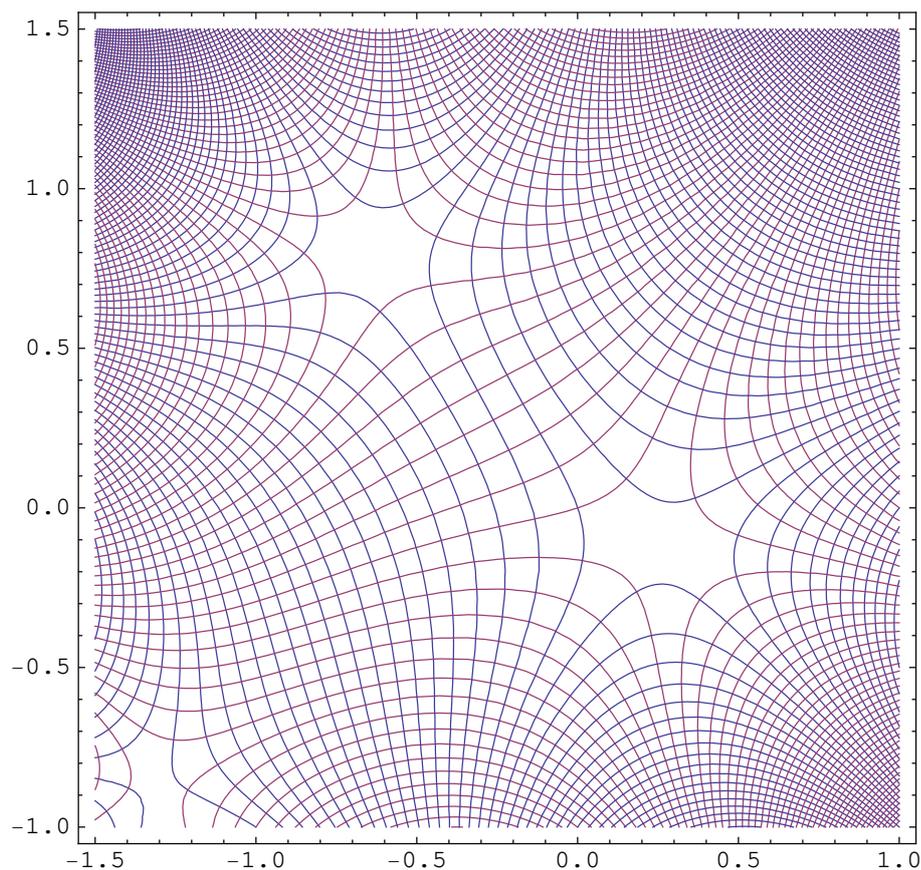


Abbildung 4.4: Niveaulinien der Real- und Imaginärteile der Funktion $f(z) = z^5 - (1 + i)z^4 - (5 + 4i)z^3 - 8z^2 + (6 - 2i)z$.

Die ersten Ableitungen ergeben sich als

$$\begin{aligned} u_x &= (x + 1)e^x \cos(y) - e^x(y + 1) \sin(y) \\ u_y &= -(x + 1)e^x \sin(y) - e^x(y + 1) \cos(y). \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir durch Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$\begin{aligned} v_x &= (x + 1)e^x \sin(y) + e^x(y + 1) \cos(y) \\ v_y &= (x + 1)e^x \cos(y) - e^x(y + 1) \sin(y). \end{aligned}$$

Integration der ersten Gleichung nach x ergibt

$$v(x, y) = xe^x \sin(y) + e^x(y + 1) \cos(y) + C(y).$$

Differentiation nach y liefert

$$v_y = xe^x \cos(y) + e^x \cos(y) - e^x(y + 1) \sin(y) + C'(y),$$

woraus sich durch Vergleich mit oben $C'(y) = 0$ ergibt. Wir können also $C(y) = 0$ wählen. Damit ergibt sich

$$v(x, y) = xe^x \sin(y) + e^x(y + 1) \cos(y)$$

und

$$f(x + iy) = e^x(x \cos(y) - (y + 1) \sin(y)) + i(xe^x \sin(y) + e^x(y + 1) \cos(y)).$$

Indem wir nun $y = 0$ setzen, erhalten wir

$$f(x) = (x + i)e^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

woraus wir aufgrund des Identitätssatzes

$$f(z) = (z + i)e^z \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

schließen können.

Eine zweite Methode zur Bestimmung der konjugiert harmonischen Funktion verwendet die Tatsache, dass die Ableitung der zugehörigen holomorphen Funktion f durch die Cauchy-Riemann-Gleichungen leicht aus u zu bestimmen ist:

$$f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = u_x(x, y) - iu_y(x, y).$$

Indem wir nun y konstant (z.B. 0) wählen, erhalten wir einen Ausdruck für f' auf einer Geraden, woraus wir nach dem Identitätssatz f' in einem geeigneten Teilgebiet von \mathbb{C} bestimmen können. Die gesuchte Funktion f kann nun durch Integration bestimmt werden.

Beispiel 41. Wir starten wieder mit

$$u(x, y) = e^x(x \cos(y) - (y + 1) \sin(y)).$$

Aus den ersten Ableitungen

$$\begin{aligned} u_x &= (x + 1)e^x \cos(y) - e^x(y + 1) \sin(y) \\ u_y &= -(x + 1)e^x \sin(y) - e^x(y + 1) \cos(y). \end{aligned}$$

erhalten wir

$$f'(x + iy) = u_x - iu_y = (x + 1)e^x \cos(y) - e^x(y + 1) \sin(y) + i((x + 1)e^x \sin(y) + e^x(y + 1) \cos(y)).$$

Indem wir $y = 0$ setzen, ergibt sich

$$f'(x) = (x + 1 + i)e^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

und somit

$$f'(z) = (z + 1 + i)e^z \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Durch Integration erhalten wir die Stammfunktion

$$f(z) = (z + i)e^z = (x + i(y + 1))e^x(\cos(y) + i \sin(y)),$$

woraus wir Real- und Imaginärteil bestimmen können

$$u(x, y) + iv(x, y) = e^x(x \cos(y) - (y + 1) \sin(y)) + ie^x(x \sin(y) + (y + 1) \cos(y)).$$

Wir wollen nun die Potentialgleichung auf der Einheitskreisscheibe für gegebene Randwerte lösen. Gesucht ist also eine Funktion $u : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\Delta u = 0, \quad \text{und } u(\cos(t), \sin(t)) = f(t)$$

für eine gegebene Funktion $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

Eine erste Idee zur Lösung dieser Gleichung ist durch unseren Lösungsansatz bei der Schwingungsgleichung motiviert: Wir suchen möglichst viele Lösungen der Potentialgleichung, die als Produkt einer Funktion des Radius und einer Funktion des Winkels (in Polarkoordinaten) geschrieben werden können:

$$u(r, \phi) := u(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) = R(r)\Phi(\phi).$$

Die Potentialgleichung in Polarkoordinaten hat die Form

$$\Delta u = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0.$$

Indem wir den Ansatz einsetzen, erhalten wir

$$\Delta R(r)\Phi(\phi) = r^2 R''(r)\Phi(\phi) + rR'(r)\Phi(\phi) + R(r)\Phi''(\phi) = 0.$$

Wir dividieren durch $R\Phi$, um die Variablen zu trennen:

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)}.$$

Da die linke Seite nur von r , die rechte Seite aber nur von ϕ abhängt, müssen beide Seiten konstant sein. Also

$$-\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = \mu^2.$$

Wir setzen hier gleich eine positive Konstante μ^2 an, da wie bei der Schwingungsgleichung sonst keine sinnvolle Lösung herauskommt. Wir erhalten Lösungen

$$\Phi(\phi) = A \cos(\mu\phi) + B \sin(\mu\phi).$$

Damit die Lösung sinnvoll ist, muss sie aber 2π -periodisch sein, da in Polarkoordinaten die Winkel $\phi = 0$ und $\phi = 2\pi$ dieselben Punkte der Ebene beschreiben. Daraus ergibt sich, dass μ eine ganze Zahl sein muss.

Die verbleibende Gleichung

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = \mu^2$$

hat die Lösungen

$$R(r) = Cr^\mu + Dr^{-\mu},$$

woraus sich insgesamt ein Lösungsansatz

$$u(r, \phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (c_n \cos(n\phi) + d_n \sin(n\phi))$$

ergibt. Die zweite Summe muss verschwinden, weil die zugehörige Lösung für $r \rightarrow 0$ unbeschränkt ist. Also haben wir

$$u(r, \phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi))$$

und

$$u(\cos(\phi), \sin(\phi)) = f(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)).$$

Wir haben damit ein einfaches Lösungsverfahren für die Potentialgleichung, indem wir die Funktion f aus der Randbedingung in eine Fourier-Reihe entwickeln: zu der Funktion

$$f(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi))$$

aus der Randbedingung gehört die Lösung

$$u(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)).$$

Beispiel 42. Gesucht ist die Lösung der Potentialgleichung

$$\Delta u = 0, \quad u(\cos(t), \sin(t)) = f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq \pi \\ -1 & \text{für } -\pi < t < 0. \end{cases}$$

Die Funktion f ist ungerade, daher gilt $a_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für die Werte b_n ergibt sich

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) dt = \frac{2(1 - \cos(n\pi))}{\pi n} = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

also

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)t)$$

und

$$u(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} r^{2n+1} \sin((2n+1)\phi).$$

Eine zweite Lösungsmethode verwendet die CIF. Wir wissen, dass die Lösung u der Realteil einer holomorphen Funktion g ist, für die natürlich die CIF gilt, also

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{für } |z| < 1. \quad (4.2)$$

Die Schwierigkeit bei der Bestimmung des Realteils der rechten Seite ist nun die Tatsache, dass im Integral Real- und Imaginärteil von g mit den Real- und Imaginärteilen von $\frac{d\zeta}{\zeta - z}$ "gemischt" werden. Es tritt also rechts auch die konjugiert harmonische Funktion v auf, die wir nicht kennen.

Dieses Problem lässt sich lösen, indem wir auf der rechten Seite ein geeignetes verschwindendes Integral addieren, das den Integranden reell macht. Aus dem CIS folgt, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{\bar{z}}{1 - \zeta\bar{z}} g(\zeta) d\zeta = 0 \quad (4.3)$$

gilt. Andererseits ergibt sich unter Verwendung von $\zeta\bar{\zeta} = 1$

$$\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{1 - \zeta\bar{z}} = \bar{\zeta} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}. \quad (4.4)$$

Indem wir (4.3) zu (4.2) addieren und (4.4) einsetzen, erhalten wir

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \bar{\zeta} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} g(\zeta) d\zeta.$$

Mit der Parametrisierung $\zeta = e^{it}$ und $z = re^{i\phi}$ ergibt sich daraus

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-it} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\phi)+r^2} g(e^{it}) e^{it} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\phi)+r^2} g(e^{it}) dt.$$

Die Funktion $\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\phi)+r^2}$ ist rein reell, daher ergibt sich aus dieser Formel der Realteil von g im Inneren des Kreises nur aus dem Realteil von g auf der Kreislinie. Für die Lösung der Potentialgleichung

$$\Delta u = 0, \quad u(\cos(t), \sin(t)) = f(t)$$

ergibt sich damit

$$u(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\phi)+r^2} f(t) dt,$$

die POISSONSche Integralformel (PIF).

Die so erhaltene Lösung stimmt natürlich mit der durch den Fourier-Reihen-Ansatz bestimmten überein.

4.5 Der globale Cauchysche Integralsatz

Wir wollen die Voraussetzungen des einfach zusammenhängenden Gebiets G im CIS und der CIF los werden. Seien C_1, \dots, C_n geschlossene Kurven in G . Dann nennen wir die formale Summe

$$\Gamma = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_n$$

eine *Kette*.

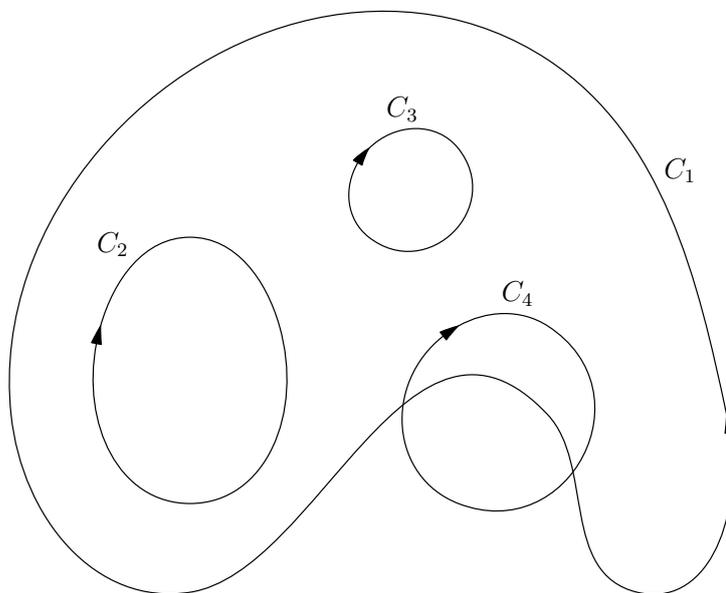


Abbildung 4.5: Die Kette $\Gamma = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$

Wir definieren das Integral über eine Kette durch:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz.$$

Ebenso definieren wir den Index bezüglich einer Kette

$$\text{Ind}_\Gamma(z_0) = \text{Ind}_{C_1}(z_0) + \text{Ind}_{C_2}(z_0) + \cdots + \text{Ind}_{C_n}(z_0)$$

Satz 4.13 (Globaler CIS). *Sei G ein Gebiet und Γ eine Kette in G , für die*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus G : \text{Ind}_\Gamma(z) = 0$$

gilt (Γ umläuft also keine Punkte außerhalb von G). Dann gilt für jedes $f \in H(G)$

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Beweisskizze. Weil Γ keinen Punkt aus $\mathbb{C} \setminus G$ umläuft, können wir “Brücken” zwischen den Kurven von Γ einbauen, sodass eine geschlossene Kurve in G entsteht, die ein Gebiet berandet (siehe Abbildung 4.6). Über diese verschwindet das Integral.

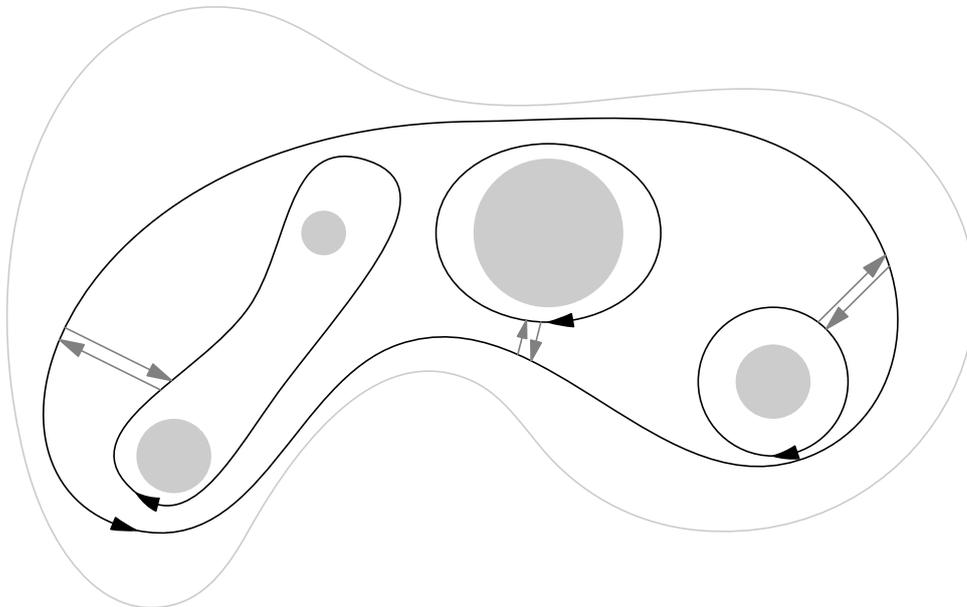


Abbildung 4.6: Zum Beweis des globalen CIS

Die Integrale über die “Brücken” heben sich gegenseitig auf. □

Satz 4.14. *Globale CIF: Sei G ein Gebiet und Γ eine Kette in G , für die*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus G : \text{Ind}_\Gamma(z) = 0$$

gilt (Γ umläuft also keine Punkte außerhalb von G). Dann gilt für $f \in H(G)$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \text{Ind}_\Gamma(z).$$

Bemerkung 26. Wenn $\text{Ind}_\Gamma(z) = 0$, dann kann $f(z)$ aus dieser Formel nicht bestimmt werden.

Wir betrachten nun ein Gebiet mit einem „Loch“.

Dann liegt in dem Gebiet ein Kreisring:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}.$$

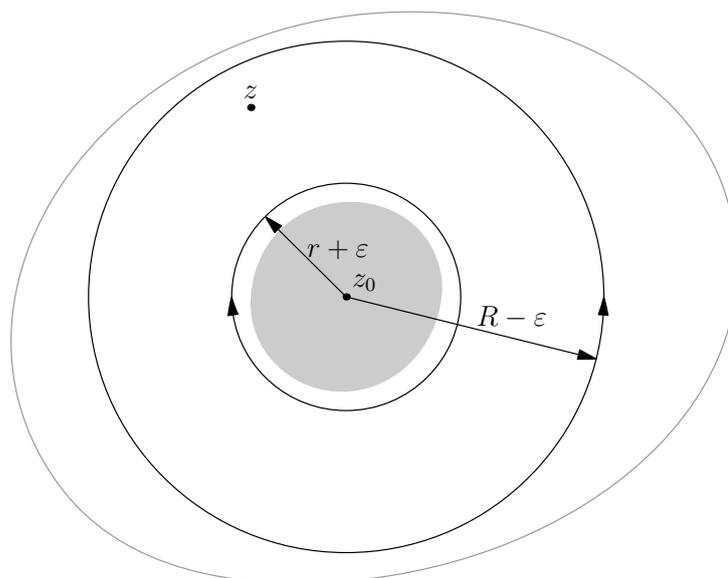


Abbildung 4.7: Kreising

Wir wenden nun die neue Version der CIF auf diesen Kreising an und erhalten für $r + \varepsilon \leq |z - z_0| \leq R - \varepsilon$

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\Gamma}(z)f(z) &= f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{|\zeta - z_0| = R - \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{|\zeta - z_0| = r + \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) \end{aligned}$$

Wie im Beweis der Potenzreihendarstellung entwickeln wir $\frac{1}{\zeta - z}$ in beiden Integralen in geometrische Reihen. Für den äußeren Kreis schreiben wir (wegen $R - \varepsilon = |\zeta - z_0| > |z - z_0|$)

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

und erhalten nach Einsetzen in das Integral

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = R - \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = R - \varepsilon} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = R - \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

Ebenso entwickeln wir auf dem inneren Kreis mit $r + \varepsilon = |\zeta - z_0| < |z - z_0|$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{(z - z_0) \left(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$$

und setzen wieder in das Integral ein, um

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r+\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r+\varepsilon} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} d\zeta \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^{-n-1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r+\varepsilon} f(\zeta)(\zeta-z_0)^n d\zeta
 \end{aligned}$$

zu erhalten.

Wenn wir nun die beiden Integrale zusammenfassen, erhalten wir

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

mit

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=R-\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta & \text{für } n \geq 0 \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r+\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta & \text{für } n < 0. \end{cases}$$

Wenn wir nun beachten, dass wir die Integrationskurven beliebig innerhalb des Kreisringes verformen können, haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 4.15 (LAURENT-Reihe). *Sei f holomorph in einem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-z_0| < R\}$, dann gilt*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta)(\zeta-z_0)^{-n-1} d\zeta, n \in \mathbb{Z}$$

wobei C eine beliebige Kurve im Kreisring ist, die z_0 genau einmal umläuft. Die Reihe konvergiert für $r < |z-z_0| < R$.

Bemerkung 27. Potenzreihen haben sich als die natürliche Darstellung von holomorphen Funktionen auf Kreisscheiben ergeben. Analog dazu haben wir Laurent-Reihen als Darstellung auf Kreisringen erhalten.

Spezialfall: $r = 0$ d.h. $f \in H(G \setminus \{z_0\})$. In diesem Fall nennen wir den Teil der Laurent-Reihe mit negativen Exponenten den *Hauptteil*.

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n}_{\text{Hauptteil}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad 0 < |z-z_0| < R$$

Aus Satz 4.12 ergibt sich dann:

1. Wenn der Hauptteil verschwindet, dann hat f in z_0 eine hebbare Singularität
2. Wenn der Hauptteil aus endlich vielen Summanden besteht, dann hat f in z_0 einen Pol

3. Wenn den Hauptteil aus unendlich vielen Summanden besteht, dann hat f in z_0 eine wesentliche Singularität.

Definition 4.5.1. Eine Funktion f heißt meromorph auf G , wenn sie auf $G \setminus A$ holomorph ist und in den Punkten von A höchstens Pole hat (keine wesentlichen Singularitäten). Sei G ein Gebiet und habe $A \subseteq G$ keine Häufungspunkte in G .

Aus der Formel für die Koeffizienten der Laurent-Reihe sehen wir

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta$$

oder

$$\oint_C f(\zeta) d\zeta = 2\pi i a_{-1}$$

So kann man das Integral berechnen wenn es gelingt, den Wert a_{-1} zu berechnen.

Definition 4.5.2. Sei $f \in H(G \setminus \{z_0\})$ und habe f in z_0 einen Pol m -ter Ordnung mit Hauptteil $\sum_{n=-m}^{-1} a_n (z - z_0)^n$, dann heißt a_{-1} das Residuum von f , geschrieben

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}.$$

Satz 4.16 (Residuen-Satz). Sei f auf G meromorph, C eine Kurve in G und seien z_k die Pole von f in G . Dann gilt:

$$\oint_C f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \cdot \operatorname{Ind}_C(z_k)$$

4.5.1 Bestimmung von Residuen

Um den Residuensatz verwenden zu können, müssen wir Residuen bestimmen können also zu integrieren.

Pole 1. Ordnung: $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$, $q'(z_0) \neq 0$. Dann hat f in z_0 einen Pol 1. Ordnung. Der Hauptteil besteht also aus genau einem Term, der das Residuum enthält

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Wir multiplizieren mit $(z - z_0)$ und erhalten

$$\frac{(z - z_0)p(z)}{q(z)} = a_{-1} + (z - z_0) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

woraus wir durch Grenzübergang

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{q(z)} p(z) = a_{-1}$$

und weiter

$$a_{-1} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

erhalten.

Pole höherer Ordnung (Ordnung $m > 1$): Wir setzen nun f mit dem Hauptteil an

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

multiplizieren mit $(z - z_0)^m$

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-(m-1)}(z - z_0) + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Offenbar können wir nun a_{-1} durch $(m - 1)$ -maliges Differenzieren gewinnen

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^{m-1} [(z - z_0)^m f(z)] = (m - 1)! a_{-1} + (z - z_0)(\dots),$$

also

$$a_{-1} = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m - 1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{m-1} [(z - z_0)^m f(z)] \Big|_{z=z_0}$$

Beispiel 43. Gesucht ist das Residuum von $f(z) = \frac{z+2}{(z^2+1)^2}$ in $z = i$. Offenbar liegt an dieser Stelle ein Pol zweiter Ordnung vor. Es gilt dann

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{z+2}{(z^2+1)^2} = \frac{d}{dz} \frac{(z+2)(z-i)^2}{(z^2+1)^2} \Big|_{z=i} = \frac{d}{dz} \frac{(z+2)}{(z+i)^2} \Big|_{z=i} = \frac{-z-4+i}{(z+i)^3} \Big|_{z=i} = -\frac{i}{2}.$$

4.6 Anwendungen des Residuensatzes

4.6.1 Berechnungen von reellen Integralen

Wir wollen den Residuensatz verwenden, um eine simple und schnelle Methode zur Berechnung von einigen Typen von reellen Integralen zu bekommen. Manche von diesen Typen konnten wir zwar schon in der Analysis T1 durch Bestimmung von Stammfunktionen lösen, für einige der Typen ist die Bestimmung einer elementaren Stammfunktion aber schlicht unmöglich.

- $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$ R eine rationale Funktion mit Zählergrad \leq Nennergrad -2
- $\int_0^{2\pi} R(\cos(x), \sin(x)) dx$ R rationale Funktion
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} R(x) dx, t \in \mathbb{R}, R$ eine rationale Funktion mit Zählergrad \leq Nennergrad -2
bzw. $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos(tx) dx$ bzw. $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin(tx) dx$

Integrale über rationale Funktionen

Beispiel 44. Wir wollen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

bestimmen. Dazu benützen wir die Gleichung

$$\oint_{C_R} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{1+z^2},$$

die für $R > 1$ und die durch Abbildung 4.8 gegebene Kurve C_R gilt.

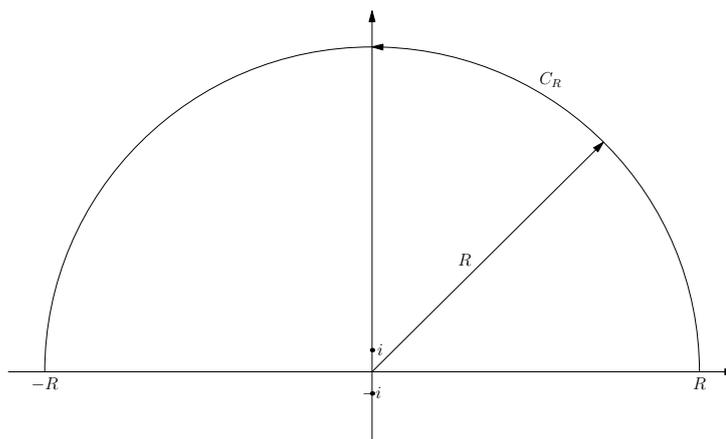


Abbildung 4.8: Der Integrationsweg C_R

Wir berechnen das Residuum:

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{1+z^2} = \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}.$$

Damit ergibt sich für $R > 1$

$$\oint_{C_R} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} + \int_{\text{Halbkreis}} \frac{dz}{1+z^2}$$

Für das Integral über dem Halbkreis gilt dann (für $R \rightarrow \infty$)

$$\left| \int_{\text{Halbkreis}} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leq \frac{1}{R^2-1} \underbrace{\pi R}_{\text{Länge Halbkreis}} \rightarrow 0,$$

$$\text{also } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{1+z^2} = \pi$$

Beispiel 45.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^3} = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res} \frac{1}{(z^2+2z+2)^3}$$

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \pm i$$

$$\Rightarrow 2\pi i \sum \operatorname{Res} \frac{1}{(z^2 + 2z + 2)^3} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1+i} \frac{1}{(z^2 + 2z + 2)^3}$$

Es liegt ein Pol dritter Ordnung vor, also gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-1+i} \frac{1}{(z^2 + 2z + 2)^3} &= \frac{1}{2!} \left(\frac{d}{dz} \right)^2 \frac{(z+1-i)^3}{(z^2 + 2z + 2)^3} \Big|_{z=-1+i} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dz} \right)^2 \frac{1}{(z+1+i)^3} \Big|_{z=-1+i} = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (-3) \frac{1}{(z+1+i)^4} \Big|_{z=-1+i} = \frac{6}{(2i)^5} \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^3} = 2\pi i \frac{6}{32i} = \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

Bemerkung 28. Seien p, q Polynome, $\operatorname{grad} p \leq \operatorname{grad}(q) - 2$, q habe keine Nullstellen in \mathbb{R} , dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k) > 0} \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{p(z)}{q(z)},$$

wobei die Summe über die Pole in der oberen Halbebene zu erstrecken ist.

Integrale über rationale Funktionen in Winkelfunktionen

Wir wollen nun Integrale über rationale Funktionen in Winkelfunktionen in komplexe Kurvenintegrale umschreiben, um die Residuenrechnung anwenden zu können.

Beispiel 46. Um

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 4 \cos x}$$

zu berechnen, schreiben wir $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ und substituieren $z = e^{ix}$ (also $dz = iz dx$)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 4 \cos x} &= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 4 \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})} \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz(5 + 2(z + \frac{1}{z}))} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{i(2z^2 + 5z + 2)} = 2\pi i \sum_{|z| < 1} \operatorname{Res}_z \frac{1}{i(2z^2 + 5z + 2)}, \end{aligned}$$

dabei ist die Summe diesmal über alle Pole innerhalb des Einheitskreises zu erstrecken. Wir suchen also alle Nullstellen des Nenners innerhalb des Einheitskreises

$$2z^2 + 5z + 2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = -\frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

-2 wird nicht umlaufen

$$\operatorname{Res}_{z=-\frac{1}{2}} \frac{1}{i(2z^2 + 5z + 2)} = \frac{1}{i(4z + 5)} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3i}$$

und damit

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 4 \cos x} = 2\pi i \frac{1}{3i} = \frac{2\pi}{3}$$

Bemerkung 29. Sei R eine rationale Funktion. Dann kann

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(x), \sin(x)) dx$$

bestimmt werden, indem man $z = e^{ix}$ substituiert und $\cos(x) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ und $\sin(x) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$ setzt.

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(x), \sin(x)) dx = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{iz}$$

Das Integral kann durch Residuenrechnung bestimmt werden.

Integrale über rationale Funktionen mal e^{itx} (Fourier-Transformationen)

Die Integrale, die wir bisher bestimmen konnten, konnten wir (allerdings mit erheblich größerem Aufwand) auch mit den Mitteln der reellen Analysis bestimmen. Wir wollen nun eine Klasse von Integralen studieren, zu denen es keine elementaren Stammfunktionen gibt. Derartige Integrale treten etwa bei der Bestimmung von Fourier-Transformationen auf. Wir betrachten $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $\deg p \leq \deg q - 2$.

Für $t > 0$ integrieren wir über den oberen Halbkreis mit Radius r

$$\begin{aligned} \oint_{C_r} e^{itz} R(z) dz &= 2\pi i \sum_n \operatorname{Res}_{z=z_n} R(z) e^{itz} \\ &= \int_{-r}^r e^{itx} R(x) dx + \int_{\text{Halbkreis}} e^{itz} R(z) dz \\ z &= r \cos \varphi + i \sin \varphi \quad 0 < \varphi \leq \pi \\ \left| \int_{\text{Halbkreis}} e^{itz} R(z) dz \right| &\leq \underbrace{\pi r}_{\leq C \frac{1}{r^2}} \underbrace{\frac{1}{r^2}}_{\rightarrow 0 (r \rightarrow \infty)}. \end{aligned}$$

Der Integrand konnte auf dem Kreis $|z| = r$ mit $C \frac{1}{r^2}$ abgeschätzt werden, weil wir $\deg p \leq \deg q - 2$ angenommen haben, und wegen

$$|e^{itz}| = \underbrace{|e^{itr \cos \varphi}|}_1 |e^{-rt \sin \varphi}| \leq 1.$$

Damit erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res} R(z) e^{itz} \quad \text{für } t \geq 0$$

Für $t < 0$ integrieren wir über den unteren Halbkreis mit Radius r und erhalten

$$\begin{aligned} \oint_{D_r} R(z)e^{itz} dz &= -2\pi i \underbrace{\sum \text{Res } R(z)e^{itz}}_{\text{Pole in der unteren Halbebene}} \\ &= \int_{-r}^r R(x)e^{itx} dx + \underbrace{\int R(z)e^{itz} dz}_{|e^{itz}| \leq 1} \\ \int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{itx} dx &= -2i\pi \sum_{\text{Im } z < 0} \text{Res } R(z)e^{itz} \end{aligned}$$

Beispiel 47. Wir wollen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{(1+x^2)^2} dx$$

bestimmen. Dazu bestimmen wir $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ dessen Realteil das gesuchte Integral ist. Zuerst behandeln wir den Fall $t > 0$, für den

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2\pi i \text{Res}_{z=i} \frac{e^{itz}}{(z^2+1)^2}$$

gilt.

$$\text{Res}_{z=i} e^{itz} \frac{1}{(1+z^2)^2} = \left. \frac{1}{1} \frac{d}{dz} \frac{e^{itz}(z-i)^2}{(z+i)^2(z-i)^2} \right|_{z=i}$$

Für das Residuum ergibt sich

$$\left. \frac{ite^{itz}(z+i)^2 - e^{itz}2(z+i)}{(z+i)^4} \right|_{z=i} = \frac{ite^{-t}2i - e^{-t}2}{(2i)^3} = \frac{e^{-t}}{2i^2}(t+1)$$

Damit erhalten wir für $t \geq 0$

$$I = 2\pi i \frac{e^{-t}}{4i}(t+1) = \frac{\pi}{2} e^{-t}(t+1).$$

Für $t < 0$ erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = -2\pi i \text{Res}_{z=-i} e^{itz} \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{\pi}{2} e^t(1-t)$$

und insgesamt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-t}(1+t) & \text{für } t \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} e^t(1-t) & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Dies können wir zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{(1+x^2)^2} dx = \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \right) = \frac{\pi}{2} e^{-|t|} (1+|t|)$$

umschreiben.

Bemerkung 30. Sei R eine rationale Funktion, deren Zählergrad um mindestens zwei kleiner als der Nennergrad ist. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{itx} dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{\text{Pole von } R \text{ mit } \operatorname{Im} > 0} \operatorname{Res} R(z)e^{itz} & \text{für } t \geq 0 \\ -2\pi i \sum_{\text{Pole von } R \text{ mit } \operatorname{Im} < 0} \operatorname{Res} R(z)e^{itz} & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Bemerkung 31. Die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx)R(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)R(x) dx$$

sind Real- bzw. Imaginärteil des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{itx} dx$$

und werden als diese berechnet.

Integrale über rationale Funktionen mal x^{s-1}

Ein weiterer Typ von Integralen, die nicht durch elementare Stammfunktionen bestimmt werden können ist durch

$$\int_0^{\infty} R(x)x^{s-1} dx$$

gegeben. Dabei bezeichnet R wieder eine rationale Funktion und s einen komplexen Parameter, der so gewählt sein soll, dass das Integral konvergiert.

Beispiel 48.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x} dx.$$

Das Integral ist uneigentlich bei 0 und bei ∞ und konvergiert für $0 < \operatorname{Re} s < 1$.

Um $\operatorname{Arg} z$ und $\log z$ und damit $z^{s-1} = \exp((s-1)\log z)$ definieren zu können, müssen wir eine Halbgerade aus \mathbb{C} ausschneiden (egal welche). In diesem Beispiel nehmen wir die positive reelle Achse.

Wir berechnen das Integral $\oint_{C_R} \frac{z^{s-1}}{z+1} dz$ um die durch Abbildung 4.9 gegebene Kurve. Nach dem Residuensatz gilt für $\varepsilon < 1 < R$

$$\oint_{C_R} \frac{z^{s-1}}{z+1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{z^{s-1}}{z+1} = 2\pi i \exp((s-1)\log(-1)) = 2\pi i e^{i\pi s} e^{-i\pi} = -2\pi i e^{i\pi s}.$$

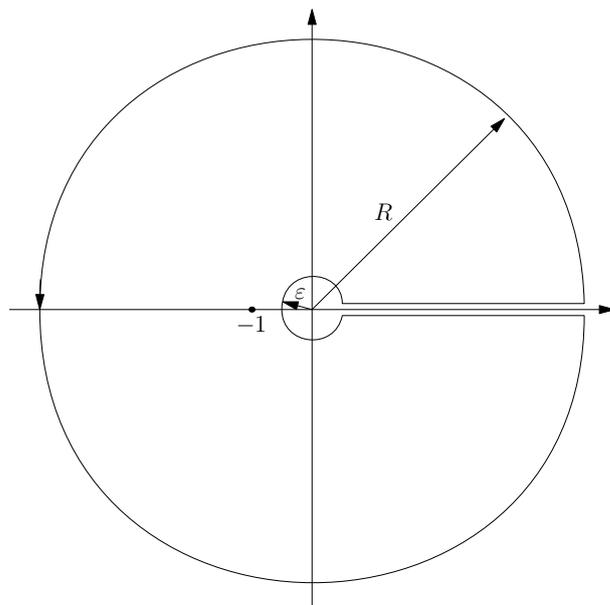


Abbildung 4.9: Integrationskurve C_R

Andererseits können wir die Integrationskurve in ihre Teile zerlegen:

$$\begin{aligned} \oint_{C_R} \frac{z^{s-1}}{z+1} dz &= \int_{\epsilon}^R \frac{x^{s-1}}{x+1} dx + \int_{|z|=R} \frac{z^{s-1}}{z+1} dz - \int_{\epsilon}^R \frac{x^{s-1} e^{2\pi i s}}{x+1} dx - \int_{|z|=\epsilon} \frac{z^{s-1}}{z+1} dz \\ &= (1 - e^{2\pi i s}) \int_{\epsilon}^R \frac{x^{s-1}}{x+1} dx + \int_{|z|=R} \frac{z^{s-1}}{z+1} dz - \int_{|z|=\epsilon} \frac{z^{s-1}}{z+1} dz. \end{aligned}$$

Für $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ gilt dann

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{z^{s-1}}{z+1} dz \right| \leq 2\pi R \frac{R^{\operatorname{Re}(s)-1}}{R-1} \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty$$

und ebenso

$$\left| \int_{|z|=\epsilon} \frac{z^{s-1}}{z+1} dz \right| \leq 2\pi \epsilon \frac{\epsilon^{\operatorname{Re}(s)-1}}{1-\epsilon} \rightarrow 0 \text{ für } \epsilon \rightarrow 0.$$

Daher gilt

$$-2\pi i e^{i\pi s} = (1 - e^{2i\pi s}) \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{x+1} dx,$$

woraus wir

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{x+1} dx = \frac{2\pi i e^{i\pi s}}{e^{2i\pi s} - 1} = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

erhalten.

Bemerkung 32. Sei R eine rationale Funktion und konvergiere das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} R(x) x^{s-1} dx$$

für $a < \operatorname{Re} s < b$. Dann kann der Wert des Integrals durch Integration über die Kurve in Abbildung 4.9 und Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ und $\varepsilon \rightarrow 0$ bestimmt werden. Dabei ist wie in dem Beispiel die komplexe Ebene entlang der positiven reellen Achse aufzuschneiden.

4.6.2 Anwendung zum Zählen von Nullstellen

Sei $f \in H(U)$, C eine geschlossene Kurve in U gegeben durch

$$C : z = z(t), t \in [a, b].$$

Dann gilt

$$I = \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_a^b \frac{f'(z(t))z'(t)}{f(z(t))} dt = \int_a^b \frac{w'(t)}{w(t)} dt = \oint_{f(C)} \frac{dw}{w}$$

mit

$$w(t) = f(z(t)) \text{ und } w'(t) = f'(z(t))z'(t).$$

Andererseits gilt nach dem Residuensatz

$$I = \oint_{f(C)} \frac{dw}{w} = 2\pi i \operatorname{Ind}_{f(C)}(0) = 2\pi i \sum_n \operatorname{Res}_{z=z_n} \frac{f'(z)}{f(z)},$$

wobei z_n die Nullstellen von f durchläuft. Wir berechnen nun die auftretenden Residuen.

Sei z_0 eine Nullstelle der Ordnung m von f . Dann gilt

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \text{ mit } g(z_0) \neq 0.$$

Daraus ergibt sich

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z)$$

und weiter

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

also

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = m = \operatorname{ord}_{z_0}(f).$$

Es gilt daher

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \operatorname{Ind}_{f(C)}(0) = \sum_n \operatorname{ord}_{z_n}(f) \operatorname{Ind}_C(z_n).$$

Satz 4.17 (Logarithmisches Residuum, Prinzip vom Argument). *Die Summe der Ordnungen der Nullstellen von f im Inneren von C ist gleich der Anzahl der Umläufe von $f(c)$ um den Nullpunkt.*

Beispiel 49. Wir wollen den Satz vom logarithmischen Residuum verwenden, um die Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^5 + 2z^4 - 3z^3 - 3z^2 - z + 6$$

zu lokalisieren. Dazu betrachten wir die Bilder von Kreisen mit verschiedenen Radien unter p : Aus den Bildern lesen wir ab, dass p keine Nullstelle innerhalb des Einheitskreises hat (die Kurve im ersten Bild umläuft den Punkt 0 nicht); weiters hat p innerhalb des Kreises mit Radius 1.3 ebenso wie innerhalb des Kreises mit Radius 2 vier Nullstellen (die Kurven im zweiten und im dritten Bild umlaufen den Punkt 0 viermal).

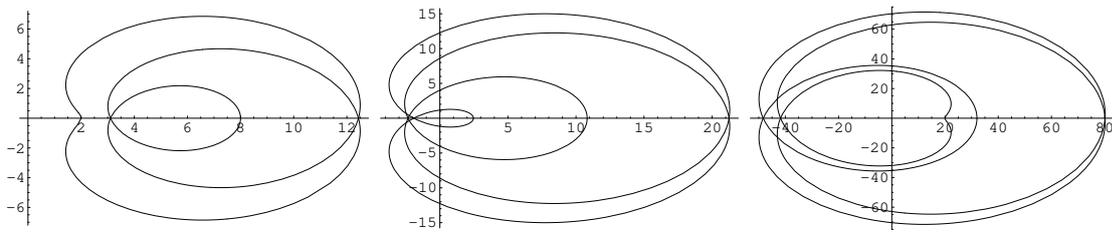


Abbildung 4.10: Bilder von Kreisen mit Radien 1, 1.3 und 2 unter $p(z) = z^5 + 2z^4 - 3z^3 - 3z^2 - z + 6$

Satz 4.18 (Satz von ROUCHÉ). *Seien f und g holomorph in U und gelte auf einer Kurve C in U : $\forall z \in C : |g(z)| < |f(z)|$, dann hat $f + g$ innerhalb von C genausoviele Nullstellen wie f .*

Beispiel 50. Wir wollen die Lage der Nullstellen von

$$p(z) = z^5 + 3z^4 - 5z^3 + 7z^2 + 6z + 3$$

studieren. Dazu setzen wir

$$f(z) = z^5 \text{ und } g(z) = 3z^4 - 5z^3 + 7z^2 + 6z + 3.$$

Die Kurve C sei der Kreis mit Radius 6: $|z| = 6$

$$|g(z)| \leq 3|z|^4 + 5|z|^3 + 7|z|^2 + 6|z| + 3 = 5259 < 7776 = |f(z)| = 6^5$$

$p(z) = g(z) + f(z)$ hat innerhalb des Kreises mit Radius 6 genausoviele Nullstellen wie $f(z) = z^5$, also 5 Nullstellen.

Wir wollen nun einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra angeben, der den Satz von Rouché verwendet.

Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$. Dann schreiben wir

$$p(z) = a_n \left(z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} z + \frac{a_0}{a_n} \right)$$

und setzen $b_j = \frac{a_j}{a_n}$. Das Polynom

$$q(z) = z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0$$

hat dann dieselben Nullstellen wie p . Wir setzen $R = 2 \max(1, |b_0|, \dots, |b_{n-1}|)$ und schätzen für $|z| = R$ ab

$$\begin{aligned} |b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0| &\leq |b_{n-1}| |z|^{n-1} + \dots + |b_1| |z| + |b_0| \\ &\leq \frac{R}{2} (R^{n-1} + R^{n-2} + \dots + 1) = \frac{R}{2} \frac{R^n - 1}{R - 1} = \frac{R}{2(R-1)} (R^n - 1). \end{aligned}$$

Wegen $R \geq 2$ gilt auch $\frac{R}{2(R-1)} \leq 1$ und damit

$$\frac{R}{2(R-1)} (R^n - 1) < R^n = |z|^n.$$

Also gilt für $|z| = R$

$$|b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0| < |z|^n.$$

Damit hat $z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0$ innerhalb des Kreises mit Radius R so viele Nullstellen wie z^n , also n Nullstellen. \square

4.7 Laplace-Transformation

Wir wollen eine Transformation für Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ finden, die die Differentiation in eine möglichst einfache Operation übersetzt und eine einfache Umkehrformel besitzen soll.

Definition 4.7.1. Sei $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine stückweise stetige Funktion, und gebe es reelle Zahlen A und C , sodass

$$|f(x)| \leq C e^{Ax}$$

für $x \geq 1$ gilt, und das Integral

$$\int_0^1 f(x) dx$$

konvergiert.

Dann heißt

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \quad (4.5)$$

die LAPLACE-Transformierte von f . Diese ist für $\operatorname{Re} s > A$ definiert und dort eine holomorphe Funktion. Für die Korrespondenz zwischen der Funktion f und ihrer Transformierten verwenden wir das Symbol $\circ \text{---} \bullet$. Die Laplace-Transformation ist immer in einer Halbebene $\operatorname{Re}(s) > c_0(f)$ holomorph. Die Größe $c_0(f)$ heißt die *Konvergenzabszisse* von $\mathcal{L}(f)$.

Die folgenden Regeln für die Transformation ergeben sich durch direktes Nachrechnen.

$F(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\mathcal{L}F(s)$
$aF(t) + bG(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$a\mathcal{L}(F(s)) + b\mathcal{L}(G(s))$
$F(t), G(t), H(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$f(s), g(s), h(s)$
1	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{s}$
$e^{\alpha t}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{s-\alpha}$
t^n	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$\sin \alpha t$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$
$\cos \alpha t$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$
$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$
$\alpha > -1, t^\alpha$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
$\delta(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	1
$F^{(k)}(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$s^k f(s) - s^{k-1}F(0) - s^{k-2}F'(0) - \dots - F^{(k-1)}(0)$
$t^k F(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$(-1)^k f^{(k)}(s)$

$\lambda > 0,$	$\begin{cases} F(t - \lambda) & \text{für } t \geq \lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\circ \text{---} \bullet$	$e^{-\lambda s} f(s)$
	$e^{-\alpha t} F(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$f(s + \alpha)$
	$F(\rho t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{\rho} f\left(\frac{s}{\rho}\right)$
	$F * G(t) = \int_0^t F(\tau)G(t - \tau) d\tau$	$\circ \text{---} \bullet$	$f(s)g(s)$
	$\frac{F(t)}{t}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\int_s^\infty f(v) dv$
	$\int_0^t F(\tau) d\tau$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{f(s)}{s}$
	$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)e^{st} ds$	$\circ \text{---} \bullet$	$f(s)$

Tabelle von wichtigen Laplace-Transformationen

Die Regeln für die Transformation von Ableitungen zeigen, warum die Laplace-Transformation so wichtig ist: sie verwandelt die komplizierte Operation der Differentiation in Multiplikation mit s .

Die letzte Zeile in der Tabelle gibt zumindest prinzipiell eine Umkehrformel als komplexes Kurvenintegral für die Laplace-Transformation.

Beispiel 51. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 5y = \cos(t), \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

Durch Anwendung der Laplace-Transformation geht diese Gleichung über in

$$s^2 \mathcal{L}(y)(s) - sy(0) - y'(0) + 4(s\mathcal{L}(y)(s) - y(0)) + 5\mathcal{L}(y)(s) = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Diese Gleichung können wir nach $\mathcal{L}(y)(s)$ auflösen und erhalten

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 5)} + \frac{s + 3}{s^2 + 4s + 5}.$$

Durch Partialbruchzerlegung ergibt sich

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{8} \frac{1}{(s^2 + 1)} + \frac{1}{8} \frac{s}{(s^2 + 1)} + \frac{7}{8} \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 1} + \frac{5}{8} \frac{1}{(s + 2)^2 + 1}$$

daraus. Indem wir die Transformationen aus der Tabelle ablesen, erhalten wir

$$y(t) = \frac{1}{8} \sin(t) + \frac{1}{8} \cos(t) + \frac{7}{8} e^{-2t} \cos(t) + \frac{5}{8} e^{-2t} \sin(t).$$

Beispiel 52. Nach dem Kirchhoffschen Gesetz fließt durch alle Teile der selbe Strom $I(t)$. Dieser ist gleich der Ladungsänderung am Kondensator, also

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

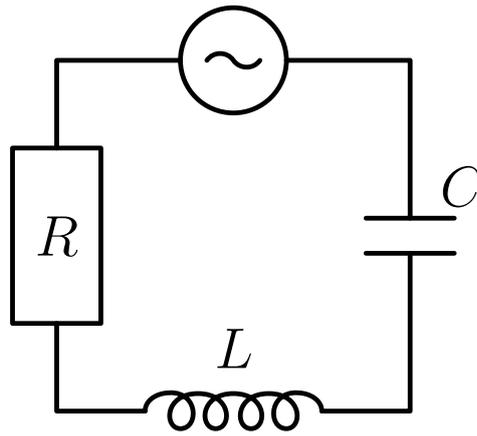


Abbildung 4.11: Ein einfacher elektrischer Schaltkreis

Die Spannungsabfälle an den einzelnen Bauteilen werden durch

$$V_C = \frac{Q}{C}, \quad V_R = RI, \quad V_L = L \frac{dI}{dt}$$

beschrieben. Diese Spannungsabfälle müssen sich zur Eingangsspannung $U(t)$ summieren. Daraus erhalten wir

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = U(t).$$

Indem wir diese Gleichung einmal differenzieren und $I = \frac{dQ}{dt}$ einsetzen, erhalten wir

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dU}{dt}.$$

Unter der Annahme $I(0) = I'(0) = 0$ und $U(0) = 0$ erhalten wir daraus durch Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}(I)(s) \left(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} \right) = s\mathcal{L}(U)(s)$$

oder

$$\mathcal{L}(I)(s) = \frac{s}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}} \mathcal{L}(U)(s).$$

4.7.1 Anwendung der Residuenrechnung für die Umkehrung der Laplace-Transformation

Die Umkehrformel

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{L}(F)(s) e^{st} ds \quad (4.6)$$

ermöglicht eine komfortable Bestimmung der Funktion F , wenn die Laplace-Transformation $\mathcal{L}(F)$ gegeben ist. In der Formel ist $c > c_0(F)$ zu wählen.

Im folgenden nehmen wir an, dass $\mathcal{L}(F)(s)$ eine meromorphe Funktion auf ganz \mathbb{C} ist. Wenn wir nun die Integrationsgerade nach links verschieben (Abbildung 4.12), erhalten wir nach dem Residuensatz die Gleichung

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{L}(F)(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-M-i\infty}^{-M+i\infty} \mathcal{L}(F)(s) e^{st} ds + \sum_{\substack{\text{Pole von } \mathcal{L}(F) \text{ mit} \\ -M < \text{Re}(s) < c}} \text{Res } \mathcal{L}(F)(s) e^{st}.$$

Das Integral entlang der Geraden $\operatorname{Re}(s) = -M$ ist von der Größenordnung e^{-Mt} , wird also mit wachsendem M immer stärker exponentiell klein. Wenn $\mathcal{L}(F)(s)$ links von $\operatorname{Re}(s) = -M$ keine Pole mehr hat und dort nicht zu stark wächst, dann verschwindet dieses Integral sogar. Wir haben dann

$$F(t) = \sum_{\substack{\text{Pole von } \mathcal{L}(F) \text{ mit} \\ -M < \operatorname{Re}(s) < c}} \operatorname{Res} \mathcal{L}(F)(s) e^{st},$$

die Funktion F lässt sich also als Summe von Residuen schreiben.

Ebenso ergibt sich für $t < 0$, dass das Umkehrintegral (4.6) verschwinden muss: wir schieben die Integrationsgerade immer weiter nach rechts. Dort hat $\mathcal{L}(F)$ keine Singularitäten und geht ausserdem für $|s| \rightarrow \infty$ gegen 0. Damit gilt

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{M-i\infty}^{M+i\infty} \mathcal{L}(F)(s) e^{st} ds = 0.$$

Da sich aber der Wert des Integrals wegen des CIF nicht ändert, solange $M > c_0(F)$ gilt, muss auch

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{L}(F)(s) e^{st} ds = 0$$

gelten.

Beispiel 53. In Beispiel 51 hatten wir die Funktion mit der Laplace-Transformierten

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 5)} + \frac{s + 3}{s^2 + 4s + 5} = \frac{s^3 + 3s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 5)}$$

durch Partialbruchzerlegung und Verwendung der Tabelle gefunden. Durch die soeben gewonnene Formel können wir die Funktion y einfacher gewinnen

$$y(t) = \sum \operatorname{Res} \left(\frac{s^3 + 3s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 5)} e^{st} \right).$$

Die Transformierte hat einfache Pole in $s = \pm i$ und $s = -2 \pm i$. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=i} \left(\frac{s^3 + 3s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 5)} e^{st} \right) &= \left(\frac{1}{16} - \frac{i}{16} \right) e^{it} \\ \operatorname{Res}_{s=-i} \left(\frac{s^3 + 3s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 5)} e^{st} \right) &= \left(\frac{1}{16} + \frac{i}{16} \right) e^{-it} \\ \operatorname{Res}_{s=-2+i} \left(\frac{s^3 + 3s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 5)} e^{st} \right) &= \left(\frac{7}{16} - \frac{5i}{16} \right) e^{(-2+i)t} \\ \operatorname{Res}_{s=-2-i} \left(\frac{s^3 + 3s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 1)(s^2 + 4s + 5)} e^{st} \right) &= \left(\frac{7}{16} + \frac{5i}{16} \right) e^{(-2-i)t}. \end{aligned}$$

Dabei sind natürlich die Residuen in $\pm i$ und $-2 \pm i$ jeweils zueinander konjugiert. Wir müssen tatsächlich also nur zwei Residuen bestimmen.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{16} (e^{it} + e^{-it}) - \frac{i}{16} (e^{it} - e^{-it}) + \frac{7}{16} e^{-2t} (e^{it} + e^{-it}) - \frac{5i}{16} e^{-2t} (e^{-it} - e^{it}) \\ &= \frac{1}{8} \cos(t) + \frac{1}{8} \sin(t) + \frac{7}{8} e^{-2t} \cos(t) + \frac{5}{8} e^{-2t} \sin(t). \end{aligned}$$

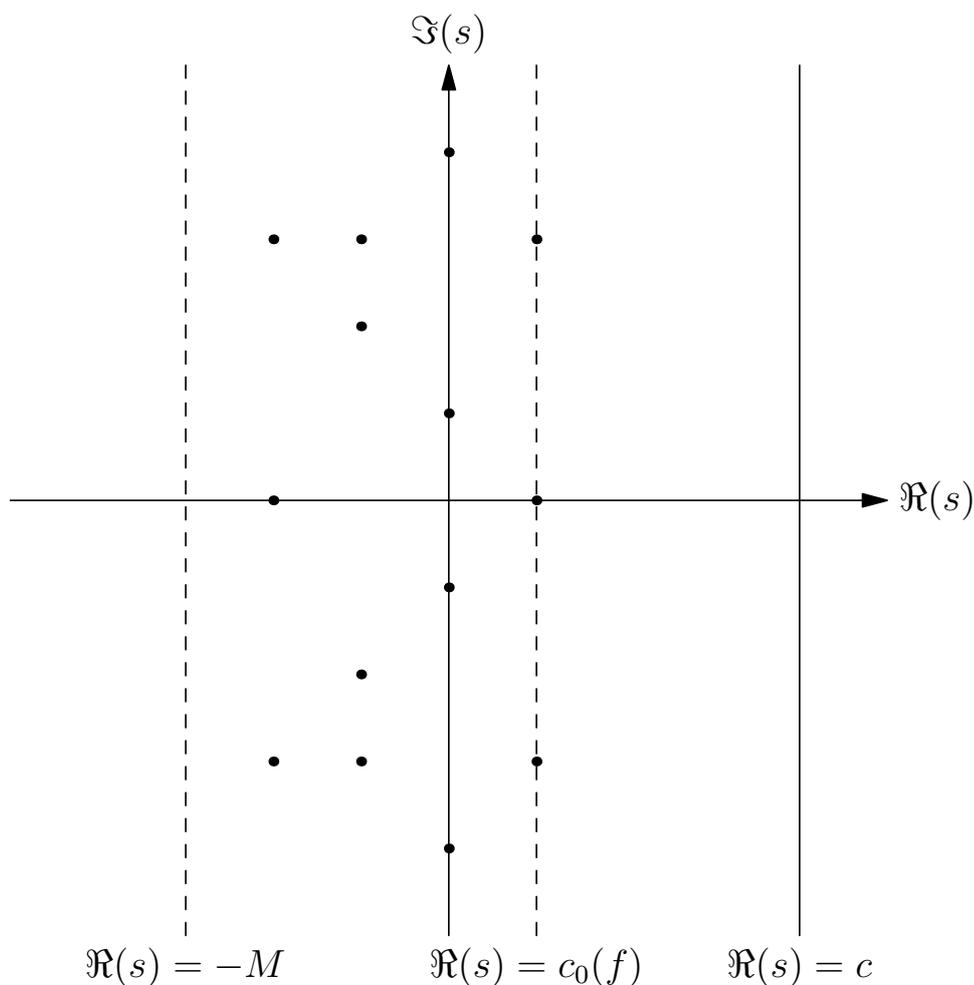


Abbildung 4.12: Integrationswege für die Laplacesche Umkehrformel

Beispiel 54. Wir wollen nun die neue Methode an einem komplizierteren Beispiel erproben. Wir suchen die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2 = t - [t], \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Zuerst bestimmen wir die Laplace-Transformation der rechten Seite

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t - [t])(s) &= \int_0^\infty ([t]) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} (t - k) e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 t e^{-s(t+k)} dt = \frac{1 - (1 + s)e^{-s}}{s^2(1 - e^{-s})}. \end{aligned}$$

Für die Laplace-Transformierte von y erhalten wir daher

$$\mathcal{L}(y)(s)s^2 - sy(0) - y'(0) + 2(\mathcal{L}(y)(s)s - y(0)) + 2\mathcal{L}(y)(s) = \frac{1 - (1 + s)e^{-s}}{s^2(1 - e^{-s})}$$

und nach Auflösen nach $\mathcal{L}(y)(s)$

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 2} + \frac{1 - (1 + s)e^{-s}}{s^2(1 - e^{-s})(s^2 + 2s + 2)}.$$

Nun wenden wir die Umkehrformel an

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \left(\frac{s+2}{s^2+2s+2} + \frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})(s^2+2s+2)} \right) e^{st} ds.$$

Indem wir die Integrationsgerade nach $\operatorname{Re}(s) = -2$ verschieben, erhalten wir daraus (Pole liegen bei $s = -1 \pm i$ und $s = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-2-i\infty}^{-2+i\infty} \left(\frac{s+2}{s^2+2s+2} + \frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})(s^2+2s+2)} \right) e^{st} ds \\ &\quad + \operatorname{Res}_{s=-1+i} \left(\frac{s+2}{s^2+2s+2} + \frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})(s^2+2s+2)} \right) e^{st} \\ &\quad + \operatorname{Res}_{s=-1-i} \left(\frac{s+2}{s^2+2s+2} + \frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})(s^2+2s+2)} \right) e^{st} \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{Res}_{s=2k\pi i} \left(\frac{s+2}{s^2+2s+2} + \frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})(s^2+2s+2)} \right) e^{st}. \end{aligned}$$

Indem wir die Integrationsgerade weiter nach links schieben, sehen wir, dass das Integral verschwindet. Übrig bleiben also die Residuen

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=-1+i} \left(\frac{s+2}{s^2+2s+2} + \frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})(s^2+2s+2)} \right) e^{st} &= \frac{((3-2i)e^i - (2-i)e)e^{(-1+i)t}}{4(-e+e^i)} \\ \operatorname{Res}_{s=-1-i} \left(\frac{s+2}{s^2+2s+2} + \frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})(s^2+2s+2)} \right) e^{st} &= \frac{((-3-2i) + (2+i)e^{1+i})e^{(-1-i)t}}{4(-1+e^{1+i})} \\ \operatorname{Res}_{s=0} \left(\frac{s+2}{s^2+2s+2} + \frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})(s^2+2s+2)} \right) e^{st} &= \frac{1}{4} \\ \operatorname{Res}_{s=2k\pi i} \left(\frac{s+2}{s^2+2s+2} + \frac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})(s^2+2s+2)} \right) e^{st} &= \frac{1}{2k\pi i(4k^2\pi^2 - 2 - 4k\pi i)} e^{2k\pi i t}. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{e^{-t}(\cos(t)(3+2e^2 - e(\sin(1)+5\cos(1))) + \sin(t)(2+e(e+\sin(1)-3\cos(1))))}{2(1+e^2-2e\cos(1))} \\ &\quad + \frac{1}{4} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{2k\pi i t}}{2k\pi i(4k^2\pi^2 - 2 - 4k\pi i)}; \end{aligned}$$

dabei ist die unendliche Reihe eine Fourier-Reihe einer Funktion mit der Periode 1. Dies ist auch nicht weiter verwunderlich, da ja auch die rechte Seite der Differentialgleichung periodisch mit Periode 1 war. Aus Abbildung 4.13 erkennt man gut, dass der Teil der Lösung, der von den Residuen bei $-1 \pm i$ kommt, mit wachsendem t schnell abklingt (wie e^{-t}). Übrig bleibt der Teil der Lösung, der durch die regelmäßige Anregung durch die rechte Seite kommt.

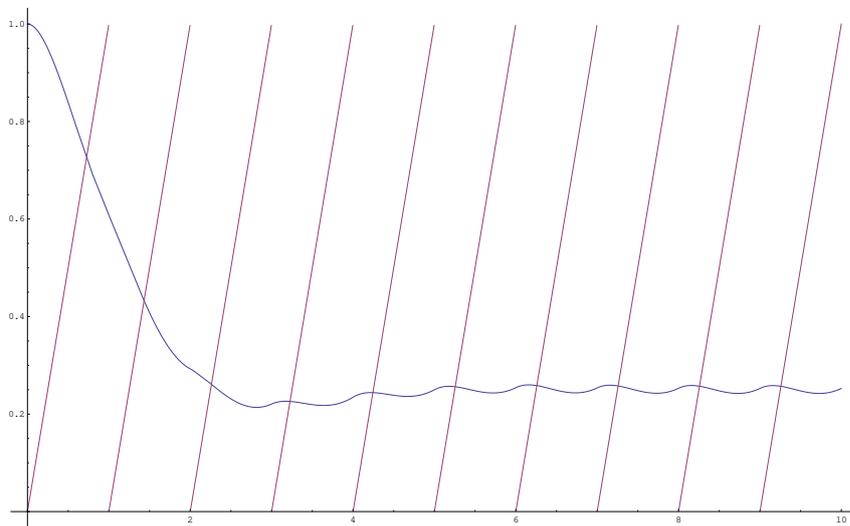


Abbildung 4.13: Die Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2y' + 2 = t - \lfloor t \rfloor$ im Vergleich zur rechten Seite.

Kapitel 5

Systeme von Differentialgleichungen und Stabilität

Bisher haben wir nur Beispiele behandelt, die eine Differentialgleichung beinhalten. In diesem Kapitel wollen nun einen Blick auf Systeme von Differentialgleichungen werfen, also auf mehrere Gleichungen zwischen mehreren Funktionen und ihren Ableitungen.

5.1 Systeme linearer DGL mit konstanten Koeffizienten

Sei A eine $n \times n$ -Matrix

Gesucht ist eine Lösung $\vec{y} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$

des AWP $\vec{y}' = A \cdot \vec{y}$ mit $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$

Sehen wir uns gleich ein Beispiel für ein solches System an:

Beispiel 55. Gegeben sei

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

Man setzt

$$y_1 = y$$

$$y_2 = y'$$

und erhält

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = -3y_1 - 2y_2$$

Dieses System mit den Variablen y_1, y_2 kann man auch folgendermaßen anschreiben:

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}$$

wobei

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

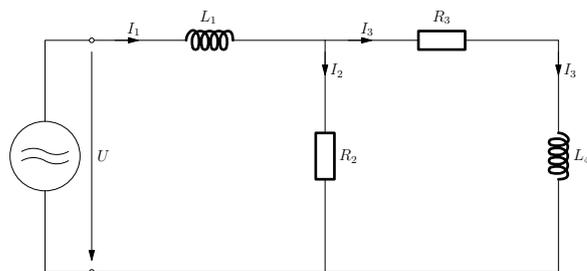


Abbildung 5.1: Beispiel-Schaltung

Beispiel 56. Gegeben sei Schaltung 5.1. Man erhält nach den KIRCHHOFFschen Gesetzen folgende Gleichungen (Knoten- und Maschenregel):

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$L_1 I_1' + I_2 R_2 = U$$

$$R_3 I_3 + L_4 I_3' - R_2 I_2 = 0$$

Zunächst erkennt man 3 Unbekannte: I_1, I_2, I_3 . In den Gleichungen kommen nur die Ableitungen von I_1 und I_3 vor, daher substituiert man I_2 mit $I_1 - I_3$ und erhält:

$$L_1 I_1' + R_2(I_1 - I_3) = U$$

$$L_4 I_3' + R_3 I_3 - R_2(I_1 - I_3) = 0$$

Nun formt man so um, dass die Ableitungen der Variablen I_1 und I_3 auf der linken Seite der Gleichung stehen:

$$I_1' = -\frac{R_2}{L_1} I_1 + \frac{R_2}{L_1} I_3 + \frac{U}{L_1}$$

$$I_3' = \frac{R_2}{L_4} I_1 - \frac{R_2 + R_3}{L_4} I_3$$

Dies kann man als System der Form

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

anschreiben. Dabei handelt es sich um ein lineares System! Setzt man

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

so erhält man folgendes System:

$$\begin{pmatrix} I_1' \\ I_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_2}{L_1} & \frac{R_2}{L_1} \\ \frac{R_2}{L_4} & -\frac{R_2 + R_3}{L_4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot U$$

Sei \vec{v} ein Eigenvektor zum Eigenwert λ der Systemmatrix A

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \tag{5.1}$$

$$\vec{y}' = A\vec{y} \tag{5.2}$$

$$\vec{y}(0) = \vec{v} \tag{5.3}$$

so setzt man

$$\begin{aligned}\vec{y}(t) &= e^{\lambda t} \cdot \vec{v} \\ \vec{y}'(t) &= \lambda e^{\lambda t} \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

Dies kann man auf Gültigkeit überprüfen, indem man einfach in $\vec{y}' = A\vec{y}$ einsetzt:

$$A\vec{y}(t) = e^{\lambda t} \cdot A \cdot \vec{v} = \lambda e^{\lambda t} \cdot \vec{v}$$

Wenn wir zu den n Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ der Matrix A n linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ finden können, dann können wir damit alle Lösungen der DGL $\vec{y}' = A\vec{y}$ beschreiben.

Wir nehmen hier immer an, dass die Matrix A diagonalisierbar ist, also dass es zu jedem Eigenwert so viele linear unabhängige Eigenvektoren gibt wie seiner Vielfachheit entspricht.

Es gibt n linear unabhängige Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, diese bilden eine Basis von \mathbb{R}^n .

$$A\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$$

wobei λ_k ein Eigenwert ist ($k = 1, \dots, n$)

Dann ist

$$\vec{y}_k(t) = e^{\lambda_k t} \vec{v}_k$$

die Lösung des AWP $\vec{y}' = A\vec{y}$ mit $\vec{y}(0) = \vec{v}_k$.

Die allgemeine Lösung der DGL $\vec{y}' = A\vec{y}$ hat die Form

$$\vec{y}(t) = \mu_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + \mu_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 + \dots + \mu_n e^{\lambda_n t} \vec{v}_n \quad (5.4)$$

wobei μ_k frei wählbare Konstanten sind.

Weil $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ eine Basis bilden, können wir die Konstanten μ_1, \dots, μ_n immer so wählen, dass

$$\vec{y}(0) = \mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_n \vec{v}_n = \vec{y}_0 \quad (5.5)$$

Beispiel 57. Gegeben sei

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \vec{y}$$

Zuerst will man die Eigenwerte bestimmen:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 5 \\ 3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} &= (-2 - \lambda)(-4 - \lambda) - 3 \cdot 5 \\ &= \lambda^2 + 6\lambda + 8 - 15 \\ &= \lambda^2 + 6\lambda - 7 = 0\end{aligned}$$

womit diese folgendermaßen lauten:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= -3 \pm \sqrt{9 + 7} \\ \lambda_1 &= -7 \\ \lambda_2 &= 1\end{aligned}$$

Nun bestimmt man die Eigenvektoren zu den Eigenwerten:

$$\lambda = 1 : \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = 0$$
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -7 : \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = 0$$
$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Man kann bereits die allgemeine Lösung anschreiben:

$$\vec{y}(t) = \mu_1 e^t \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_2 e^{-7t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Für ein AWP

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

setzt man an mit

$$\mu_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$5\mu_1 + \mu_2 = 11$$
$$3\mu_1 - \mu_2 = 5$$

woraus folgt, dass

$$\mu_1 = 2$$
$$\mu_2 = 1$$

Die zugehörige Lösung lautet nun:

$$\vec{y}(t) = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7t}$$

Beispiel 58. Gegeben sei

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}$$

Die Eigenwerte ergeben sich als

$$\begin{aligned}(-1 - \lambda)^2 + 1 &= \lambda^2 + 2\lambda + 2 \\ \lambda_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{-1} \\ \lambda_1 &= -1 + i \\ \lambda_2 &= -1 - i\end{aligned}$$

Die zugehörigen Eigenvektoren:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -1 + 1 - i & 1 \\ -1 & -1 + 1 - i \end{pmatrix} \vec{v}_1 &= 0 \\ \vec{v}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ \vec{v}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Womit die allgemeine Lösung wieder bestimmt werden kann:

$$\vec{y}(t) = \mu_1 e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \mu_2 e^{(-1-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Die Lösung sollte reell sein, daher setzen wir $\mu_1 = A + Bi$ und $\mu_2 = A - Bi$, heben e^{-t} heraus und erhalten

$$\vec{y}(t) = e^{-t} \left[(A + Bi)(\cos(t) + i \sin(t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + (A - Bi)(\cos(t) - i \sin(t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right]$$

Nach Zusammenfassen der Realteile (die Imaginärteile müssen schließlich verschwinden) erhalten wir die Lösung

$$\vec{y}(t) = e^{-t} \left[2A \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + 2B \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \right]$$

gelangt. Man kann also y_1 und y_2 auch anschreiben als

$$\begin{aligned}\vec{y}_1(t) &= e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \\ \vec{y}_2(t) &= e^{-t} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Für ein AWP

$$\begin{aligned}\vec{y}' &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{y}(0) &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

erhält man durch Einsetzen

$$\vec{y}(0) = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

womit

$$\begin{aligned} C &= 3 \\ D &= -2 \end{aligned}$$

Die Lösung für das AWP lautet:

$$\vec{y}(t) = 3e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} - 2e^{-t} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Definition 5.1.1. Sei $\vec{y}' = A\vec{y}$ ein lineares System von DGLen und seien $\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ n linear unabhängige Lösungen (A $n \times n$ -Matrix)

Dann heißt $\{\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t)\}$ Fundamentalsystem.

5.1.1 Inhomogene Systeme von DGL

Diese Systeme von DGLen weisen eine Störfunktion $\vec{b}(t)$ auf:

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(t) \tag{5.6}$$

Sei $\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ ein Fundamentalsystem.

Man wählt den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$\vec{y}(t) = \mu_1(t)\vec{y}_1(t) + \dots + \mu_n(t)\vec{y}_n(t) \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} \vec{y}'(t) &= \mu'_1(t)\vec{y}_1(t) + \mu'_2(t)\vec{y}_2(t) \dots + \mu'_n(t)\vec{y}_n(t) \\ &+ \mu_1(t)\vec{y}'_1(t) + \dots + \mu_n(t)\vec{y}'_n(t) \end{aligned} \tag{5.8}$$

und setzt wiederum in das gegebene System ein:

$$\mu'_1\vec{y}_1 + \dots + \mu'_n\vec{y}_n + \underbrace{\mu_1\vec{y}'_1 + \dots + \mu_n\vec{y}'_n}_{=} = \underbrace{A\mu_1\vec{y}_1 + \dots + A\mu_n\vec{y}_n}_{=} + \vec{b}(t) \tag{5.9}$$

womit man ein lineares Gleichungssystem in n unbekanntenen Funktionen μ'_1, \dots, μ'_n erhält:

$$\mu'_1\vec{y}_1 + \dots + \mu'_n\vec{y}_n = \vec{b}(t) \tag{5.10}$$

Nun kann man μ'_1, \dots, μ'_n bestimmen, da $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ bekannt und linear unabhängig sind.

$$\mu_k(t) = \int \mu'_k dt \tag{5.11}$$

Damit kann man die partikuläre Lösung bestimmen:

$$\vec{y}_p(t) = \mu_1(t)\vec{y}_1(t) + \dots + \mu_n(t)\vec{y}_n(t) \tag{5.12}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\vec{y} = \vec{y}_p + \vec{y}_h = \mu_1(t)\vec{y}_1(t) + \dots + \mu_n(t)\vec{y}_n(t) + A_1\vec{y}_1(t) + \dots + A_n\vec{y}_n(t).$$

Diese Methode ist im Allgemeinen sehr aufwendig.

Im Fall von Systemen mit konstanten Koeffizienten gibt es eine Ansatzmethode, die einfacher durchzuführen ist. Diese funktioniert, wenn $\vec{b}(t)$ aus (reellen und komplexen=Winkelfunktionen) Exponentialfunktionen besteht. Für das System

$$\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$$

kann man also einen Ansatz finden, wenn $\vec{b}(t)$ folgende Form aufweist:

- Es handelt sich um eine reelle Exponentialfunktion

$$\vec{b}(t) = e^{\mu t} \cdot \vec{c}$$

Der Ansatz ("Typ der rechten Seite") kann wie folgt getroffen werden:

$$\vec{y}(t) = e^{\mu t} \cdot \vec{v} \quad (5.13)$$

$$\vec{y}'(t) = \mu e^{\mu t} \cdot \vec{v} \quad (5.14)$$

Dies setzt man wie gewohnt in das gegebene System ein:

$$\mu e^{\mu t} \cdot \vec{v} = e^{\mu t} \cdot A\vec{v} + e^{\mu t} \cdot \vec{c} \quad (5.15)$$

$$\mu \vec{v} = A\vec{v} + \vec{c} \quad (5.16)$$

Wenn μ kein Eigenwert von A ist, so kann man schreiben:

$$(\mu E - A)^{-1} \vec{c} = \vec{v}$$

- Die Störfunktion ist eine komplexe Exponentialfunktion (enthält Winkelfunktionen):

$$\vec{b}(t) = e^{\mu t} (\cos(\alpha t) \vec{c}_1 + \sin(\alpha t) \vec{c}_2)$$

Der Ansatz hierfür ist

$$\vec{y}(t) = e^{\mu t} (\cos(\alpha t) \vec{v}_1 + \sin(\alpha t) \vec{v}_2)$$

$$\vec{y}'(t) = \mu e^{\mu t} (\cos(\alpha t) \vec{v}_1 + \sin(\alpha t) \vec{v}_2) + e^{\mu t} (-\alpha \sin(\alpha t) \vec{v}_1 + \alpha \cos(\alpha t) \vec{v}_2)$$

Setzt man dies wiederum ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \mu \cos(\alpha t) \vec{v}_1 + \mu \sin(\alpha t) \vec{v}_2 - \alpha \sin(\alpha t) \vec{v}_1 + \alpha \cos(\alpha t) \vec{v}_2 \\ = A \cos(\alpha t) \vec{v}_1 + A \sin(\alpha t) \vec{v}_2 + \cos(\alpha t) \vec{c}_1 + \sin(\alpha t) \vec{c}_2 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $2n$ Gleichungen in $2n$ Unbekannten:

$$\cos(\alpha t) : \mu \vec{v}_1 + \alpha \vec{v}_2 = A\vec{v}_1 + \vec{c}_1 \quad (5.17)$$

$$\sin(\alpha t) : \mu \vec{v}_2 - \alpha \vec{v}_1 = A\vec{v}_2 + \vec{c}_2 \quad (5.18)$$

Diese Gleichungen lassen sich umformen zu:

$$\mu \vec{v}_2 - \alpha \vec{v}_1 + i(\mu \vec{v}_1 + \alpha \vec{v}_2) = A\vec{v}_2 + \vec{c}_2 + i(A\vec{v}_1 + \vec{c}_1) \quad (5.19)$$

$$(\mu + i\alpha)(\vec{v}_2 + i\vec{v}_1) = A(\vec{v}_2 + i\vec{v}_1) + \vec{c}_2 + i\vec{c}_1 \quad (5.20)$$

$$[(\mu + i\alpha)E - A](\vec{v}_2 + i\vec{v}_1) = \vec{c}_2 + i\vec{c}_1 \quad (5.21)$$

Dies hat eine eindeutig bestimmte Lösung, wenn $\mu + i\alpha$ KEIN Eigenwert von A ist, d.h. Resonanz darf nicht vorliegen.

Im Fall von Resonanz (der hier nicht weiter behandelt werden soll) ist der Ansatz entsprechend zu adaptieren, indem man die Ansatzfunktionen mit Potenzen von t multipliziert.

Beispiel 59. Fortsetzung von Beispiel 56: Es seien folgende Werte gegeben:

$$\begin{aligned}R_2 &= R_3 = 100\Omega \\L_1 &= L_4 = 0.5H \\U &= 50V\end{aligned}$$

Setzt man diese Werte nun in die Systemmatrix ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vec{y}' &= \begin{pmatrix} -\frac{R_2}{L_1} & \frac{R_2}{L_1} \\ \frac{R_2}{L_4} & -\frac{R_2+R_3}{L_4} \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} \frac{U}{L_1} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -200 & 200 \\ 200 & -400 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

wobei

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} I_1(t) \\ I_3(t) \end{pmatrix}$$

Die homogene Gleichung zur Bestimmung der Eigenwerte lautet:

$$\begin{aligned}(-200 - \lambda)(-400 - \lambda) - 200^2 &= \lambda^2 + 600\lambda + 80000 - 40000 \\ \lambda_{1,2} &= 100(-3 \pm \sqrt{5}).\end{aligned}$$

Für die Eigenvektoren ergibt sich damit

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit nimmt die Lösung der homogenen Gleichung folgenden Wert an:

$$\vec{y}_h = c_1 e^{100(-3+\sqrt{5})t} \vec{v}_1 + c_2 e^{100(-3-\sqrt{5})t} \vec{v}_2$$

Für die partikuläre Lösung wird die Störfunktion wie bisher mitberücksichtigt:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} U \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da 0 kein Eigenwert von A ist, lautet der Ansatz:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$0 = \begin{pmatrix} -200 & 200 \\ 200 & -400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem für A und B ist hier leicht zu lösen:

$$\begin{aligned}-200A + 200B + 100 &= 0 \\ 200A - 400B &= 0\end{aligned}$$

ergibt

$$\begin{aligned}B &= \frac{1}{2} \\ A &= 1\end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung ist damit

$$\vec{y}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + c_1 e^{100(-3+\sqrt{5})t} \vec{v}_1 + c_2 e^{100(-3-\sqrt{5})t} \vec{v}_2$$

Anmerkung: da $\lambda_{1,2} < 0$: für $t \rightarrow \infty$ geht die homogene Lösung schnell gegen 0.

Beispiel 60. Gegeben sei

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

1. Schritt: Lösen der homogenen DGL

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}$$

ergibt folgende Eigenwerte:

$$(-2 - \lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm i$$

Für die Eigenvektoren ergeben sich folgende Berechnungen:

$$\begin{aligned}\lambda = -2 + i : \quad & (-2 - (-2 + i))x + y = 0 \\ & -ix + y = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda = -2 - i : \quad & -x + (-2 - (-2 + i))y = 0 \\ & -x - iy = 0\end{aligned}$$

womit der 1. Eigenvektor

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

lautet.

Da es sich um konjugiert komplexe Eigenwerte handelt, kann man den zweiten Eigenvektor auch gleich anschreiben (dieser ist konjugiert komplex zum 1. Eigenvektor):

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

und die homogene Lösung bilden:

$$\vec{y}_H(t) = (A + iB)e^{-2t}e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + (A - iB)e^{-2t}e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Da in dieser Lösung wieder komplexe Werte vorhanden sind, formt man um:

$$= e^{-2t} \begin{pmatrix} 2A \cos(t) - 2B \sin(t) \\ -2B \cos(t) - 2A \sin(t) \end{pmatrix}$$

womit man für \vec{y}_1 und \vec{y}_2

$$\vec{y}_1 = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_2 = e^{-2t} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

erhält. Für die partikuläre Lösung sieht die Ansatzmethode wie folgt aus:

$$\vec{y}_p(t) = \cos(t)\vec{v}_3 + \sin(t)\vec{v}_4$$

wobei

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

Abgeleitet erhält man

$$\vec{y}'_p(t) = -\sin(t)\vec{v}_3 + \cos(t)\vec{v}_4$$

und wiederum eingesetzt

$$-\sin(t)\vec{v}_3 + \cos(t)\vec{v}_4 = \cos(t) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{v}_3 + \sin(t) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{v}_4 \\ + \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koeffizientenvergleich liefert hier:

$$\sin(t) : \quad -\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{v}_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(t) : \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{v}_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun setzt man v_3 und v_4 entsprechend ein und erhält folgende Gleichungssysteme:

$$-\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

diese kann man auch anschreiben als

$$-\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2C + D \\ -C - 2D + 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2A + B + 1 \\ -B - 2A \end{pmatrix}$$

Löst man dieses Gleichungssystem, so erhält man

$$A = C = D = \frac{1}{4}$$

$$B = -\frac{1}{4}$$

und für die partikuläre Lösung:

$$\vec{y}_p = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \cos(t) + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \sin(t)$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\vec{y}(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ -\cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + \lambda e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \mu e^{-2t} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

5.2 Qualitatives Verhalten der Lösungen von Systemen von DGL

Nun wollen wir uns das Verhalten dieser Lösungen von lineare Systemen von DGL ansehen. Betrachten wir das System

$$\vec{y}' = A\vec{y} \tag{5.22}$$

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

$$\tag{5.24}$$

wobei A eine 2×2 -Matrix ist. Die Lösung $\vec{y} = \vec{0}$ ist immer Lösung eines solchen Systems. Diese Lösung nennt man die *Ruhelage* des Systems.

Für lineare Gleichungen hängt das Verhalten von den **Eigenwerten** λ_1, λ_2 der Matrix A ab. Wir wollen uns nun die verschiedenen Fälle für die Eigenwerte und damit das Systemverhalten ansehen und die Eigenschaften der Ruhelage studieren.

5.2.1 reelle Eigenwerte

- $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$
und der Lösung

$$\vec{y} = \alpha e^{\lambda_1 t} \cdot \vec{v}_1 + \beta e^{\lambda_2 t} \cdot \vec{v}_2$$

Das Ergebnis ist ein **abstoßender Knotenpunkt**. Jeder Startwert $\vec{y}_0 \neq \vec{0}$ ergibt eine Lösung, die von der Ruhelage weg strebt. (Abb. 5.2)

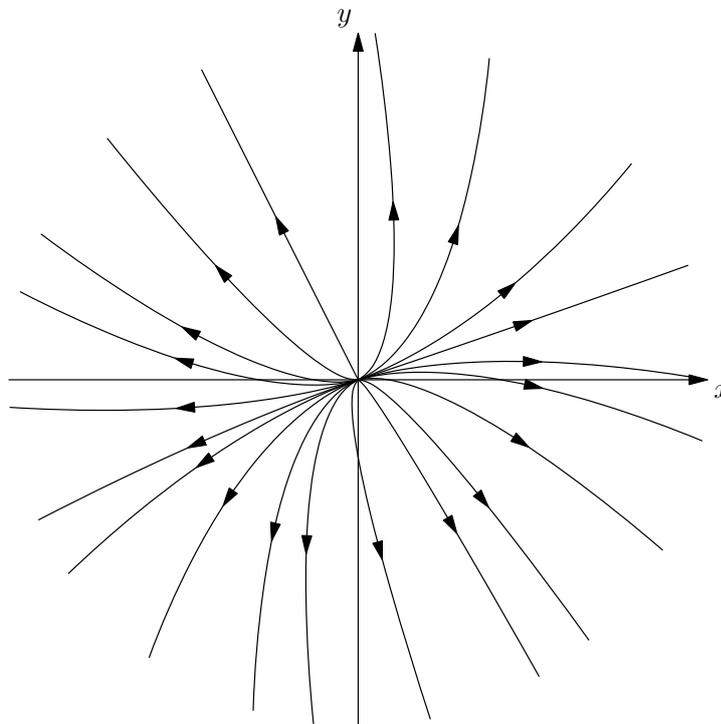


Abbildung 5.2: Abstoßender Knotenpunkt

- $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$
und der Lösung

$$\vec{y} = \alpha e^{\lambda_1 t} \cdot \vec{v}_1 + \beta e^{\lambda_2 t} \cdot \vec{v}_2$$

Das Ergebnis liefert ein ähnliches Bild, allerdings zeigen die Pfeile der Trajektorien in die andere Richtung - alle Lösungen streben gegen den Ursprung, man erhält einen **anziehenden Knotenpunkt** (Abb. 5.3).

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$. Hier ergeben sich 2 Möglichkeiten:

1. Die Matrix ist diagonalisierbar: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$\vec{y}(t) = e^{\lambda t} \vec{y}(0)$ In diesem Fall erhält man je nach Vorzeichen von λ einen anziehenden oder abstoßenden Knotenpunkt. Wenn $\lambda = 0$ ist, lautet die Differentialgleichung $\vec{y}' = \vec{0}$; in diesem Fall sind alle Lösungen konstant.

2. Die Matrix ist nicht diagonalisierbar und somit gibt es nur einen Eigenvektor. Für einen geeigneten zweiten Vektor v_2 gilt dann

$$\begin{aligned} A\vec{v}_1 &= \lambda\vec{v}_1 \\ A\vec{v}_2 &= \lambda\vec{v}_2 + \vec{v}_1 \end{aligned}$$

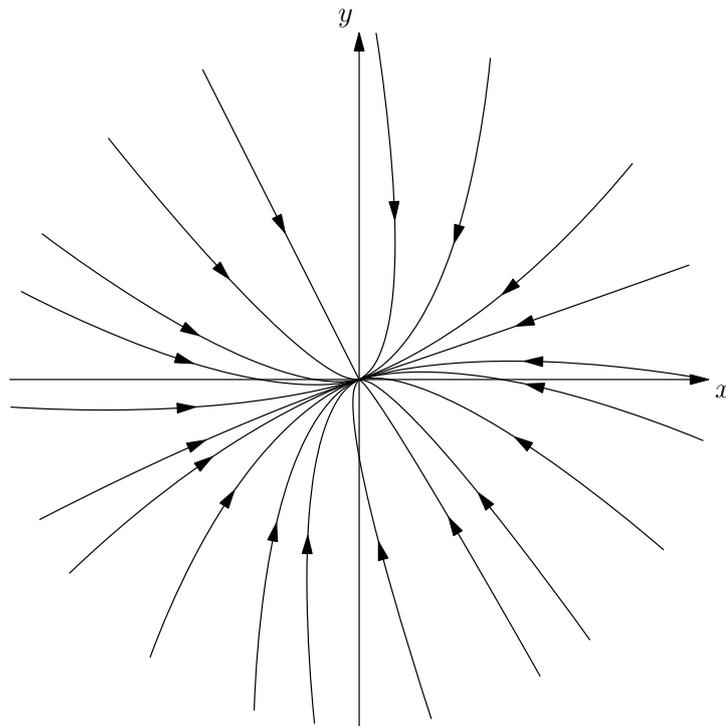


Abbildung 5.3: Anziehender Knotenpunkt

Mit

$$\begin{aligned}\vec{y}' &= A\vec{y} \\ \vec{y}_0 &= \vec{v}_1\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}\vec{y}_1(t) &= e^{\lambda t}\vec{v}_1 \\ \vec{y}_2(t) &= e^{\lambda t}\vec{v}_2 + te^{\lambda t}\vec{v}_1\end{aligned}$$

wobei

$$\vec{y}_2'(t) = \lambda e^{\lambda t}\vec{v}_2 + e^{\lambda t}\vec{v}_1 + \lambda te^{\lambda t}\vec{v}_1$$

Man überprüft nun, ob y_2 das gegebene System erfüllt:

$$\vec{y}' = \lambda e^{\lambda t}\vec{v}_2 + e^{\lambda t}\vec{v}_1 + \lambda te^{\lambda t}\vec{v}_1 \stackrel{?}{=} A(e^{\lambda t}\vec{v}_2 + te^{\lambda t}\vec{v}_1)$$

Dies trifft mit

$$\begin{aligned}A\vec{v}_1 &= \lambda\vec{v}_1 \\ A\vec{v}_2 &= \lambda\vec{v}_2 + \vec{v}_1\end{aligned}$$

zu:

$$A(e^{\lambda t}\vec{v}_2 + te^{\lambda t}\vec{v}_1) = \lambda e^{\lambda t}\vec{v}_2 + e^{\lambda t}\vec{v}_1 + \lambda te^{\lambda t}\vec{v}_1$$

Je nach Vorzeichen der Eigenwerte handelt es sich wieder um einen abstoßenden (Abb. 5.5) oder anziehenden (Abb. 5.4) Knotenpunkt. Wenn $\lambda = 0$ ist, lautet das System (für $\vec{y} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2$)

$$\begin{aligned}x_1' &= 0 \\ x_2' &= x_1.\end{aligned}$$

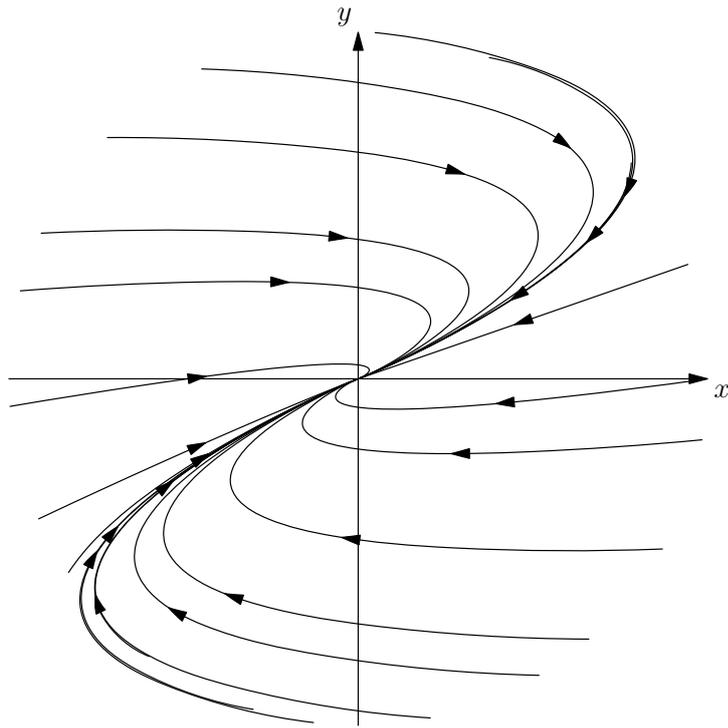


Abbildung 5.4: Anziehender Knotenpunkt im Falle einer nicht diagonalisierbaren Matrix

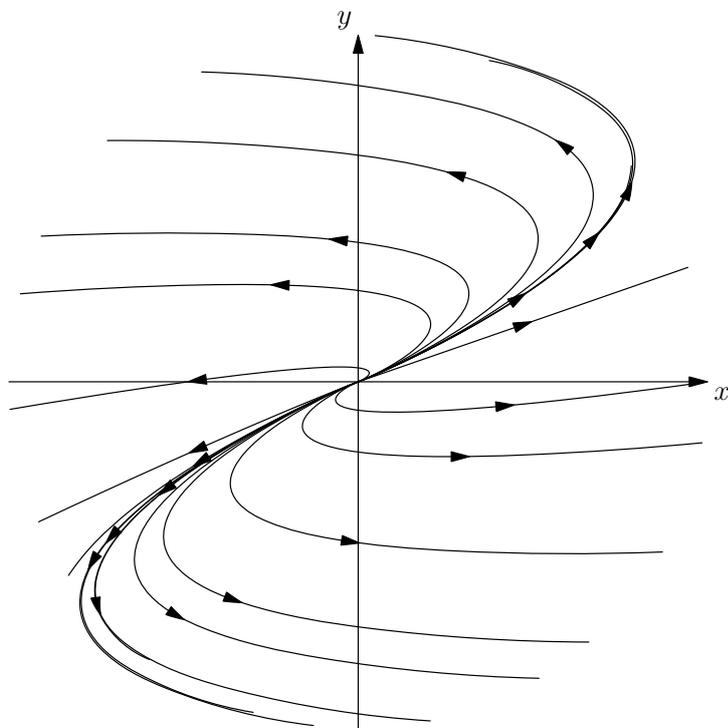


Abbildung 5.5: Abstoßender Knotenpunkt im Falle einer nicht diagonalisierbaren Matrix

Die Lösungen sind lineare Funktionen in t . Für $\vec{y}(0) = C\vec{v}_2$ ergibt sich $y(t) = C\vec{v}_2$, also eine konstante Lösung. Alle Anfangswerte auf der Geraden $C\vec{v}_2$ führen zu konstanten Lösungen. Diese Gerade nennt man eine **Ruhezone** (Abb. 5.6).

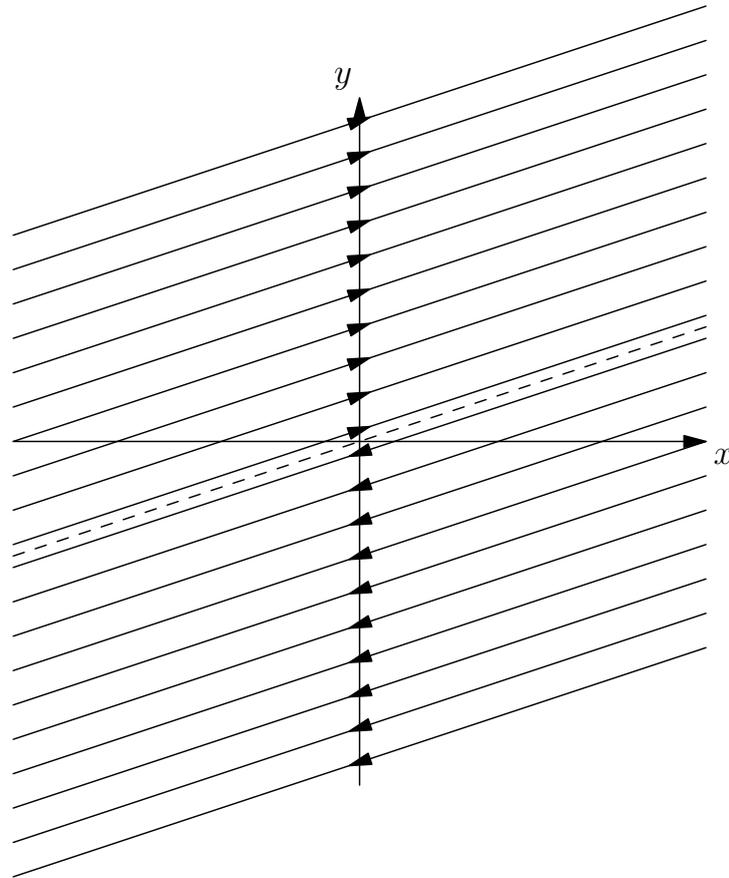


Abbildung 5.6: Ruhezone (strichlierte Linie) im Falle einer nicht diagonalisierbaren Matrix mit Eigenwert 0

- Für $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$ (oder umgekehrt) erhält man einen **Sattelpunkt** (Abb. 5.7). Die Lösungen werden in Richtung des Eigenvektors zum Eigenwert λ_2 angezogen und in der Richtung des Eigenvektors zum Eigenwert λ_1 abgestoßen.
- $\lambda_1 = 0$ mit $\lambda_2 \neq 0$
 Hierbei bildet sich eine **Ruhezone** aus; jedes Vielfache des Eigenvektors zum Eigenwert 0 liefert eine konstante Lösung. Je nach Vorzeichen des zweiten Eigenwertes streben die Trajektorien Richtung Ruhezone (Abb. 5.8) oder gegen Unendlich (Abb. 5.9).

5.2.2 komplexe Eigenwerte

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$
 Es liegen konjugiert komplexe Eigenwerte vor:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta$$

$$\lambda_2 = \alpha - i\beta$$

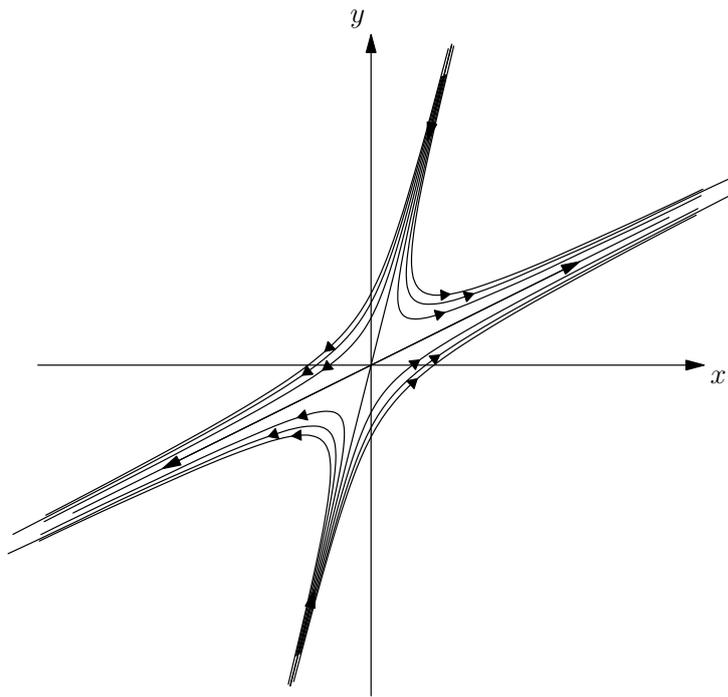


Abbildung 5.7: Sattelpunkt

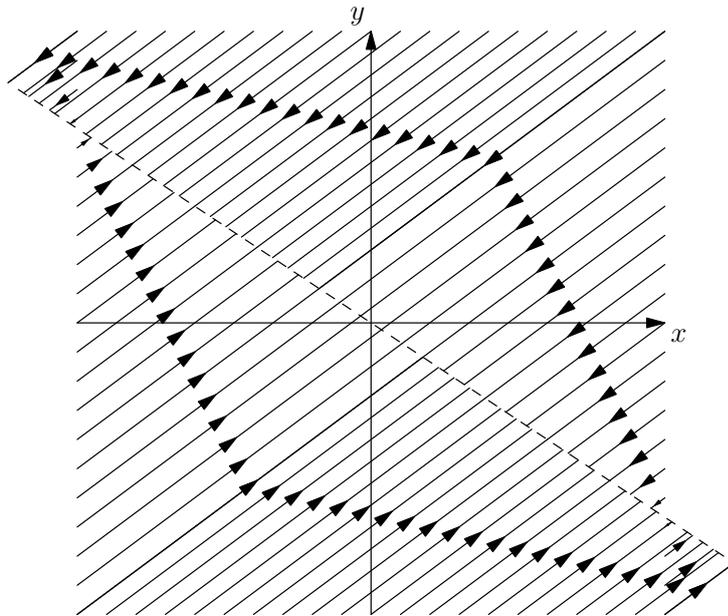


Abbildung 5.8: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$, die Trajektorien streben gegen die Ruhezone (strichlierte Line)

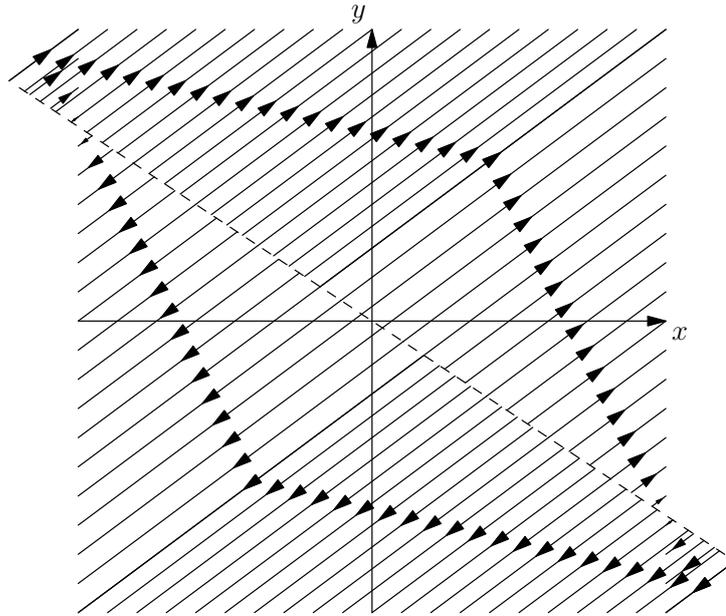


Abbildung 5.9: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$, die Trajektorien streben von der Ruhezone (strichlierte Line) weg

Die Lösung lautet

$$\vec{y}(t) = e^{\alpha t} [A\vec{v}_1 \cos(\beta t) + B\vec{v}_2 \sin(\beta t)]$$

Je nach Realteil des Eigenwertes handelt es sich um einen abstoßenden ($\alpha > 0$) oder um einen anziehenden ($\alpha < 0$) **Strudelpunkt** (Abb. 5.10 und 5.11). Für den Fall $\alpha = 0$

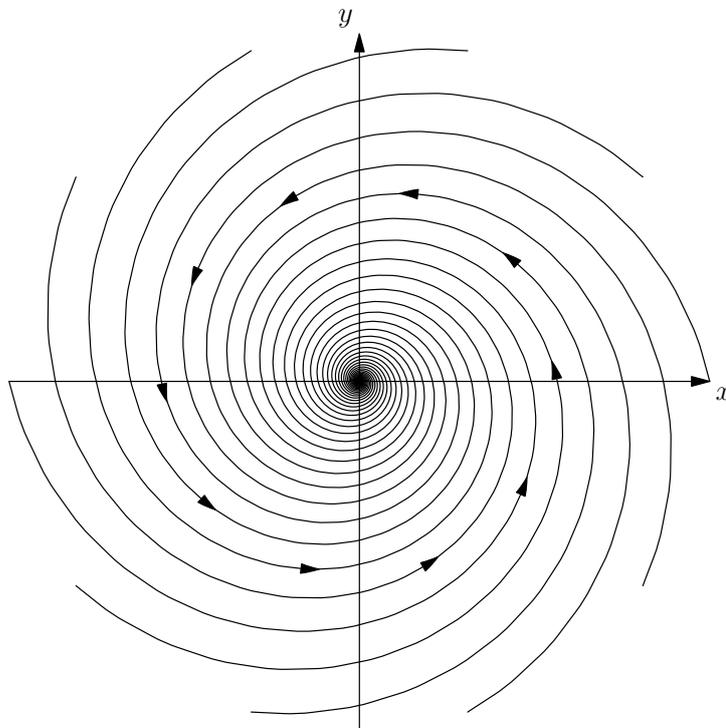


Abbildung 5.10: Anziehender Strudelpunkt

entsteht ein **Wirbelpunkt** (Abb. 5.12).

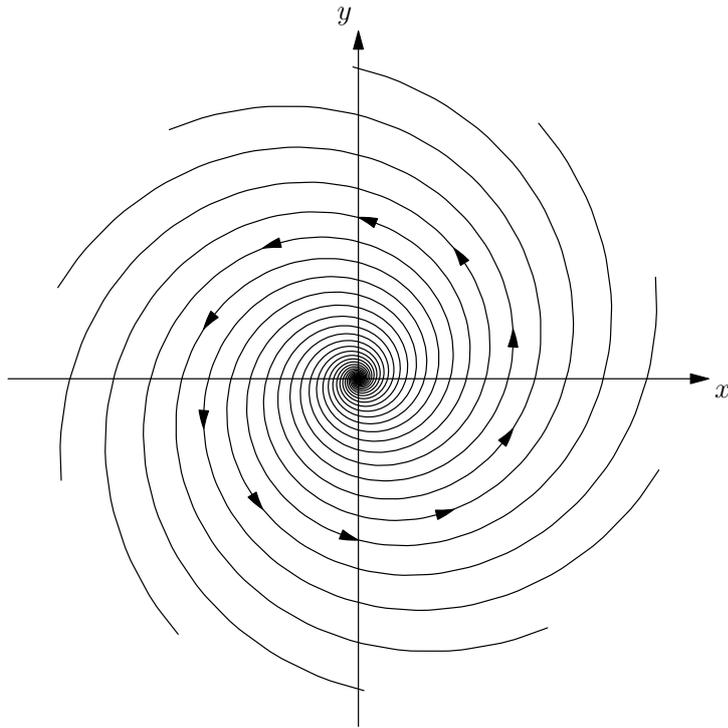


Abbildung 5.11: Abstoßender Strudelpunkt

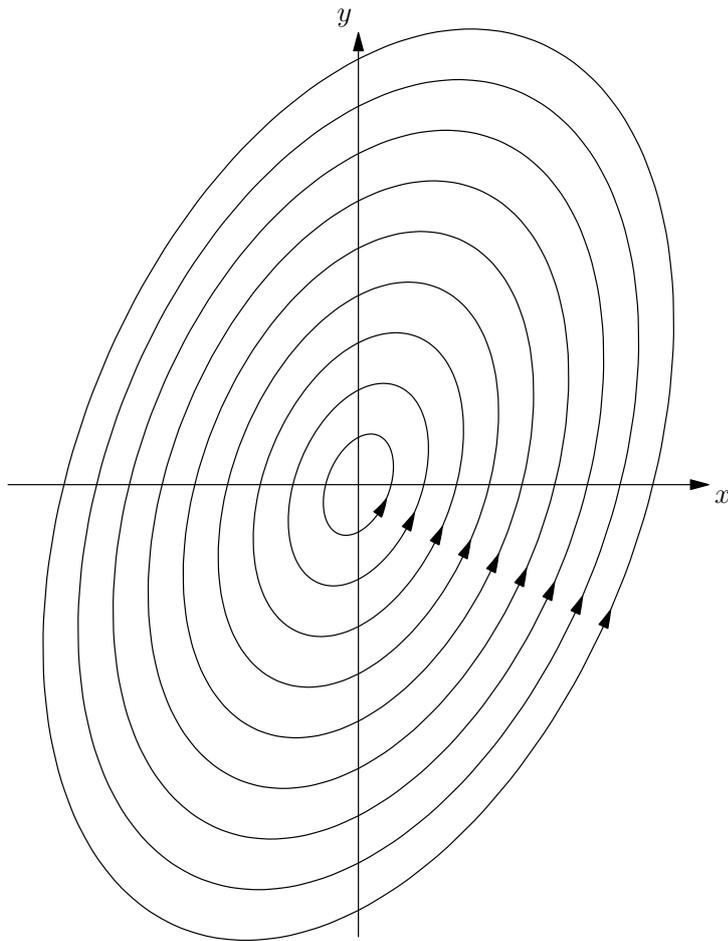


Abbildung 5.12: Wirbelpunkt

Wir wollen nun wissen, wie das Phasenportrait zu $\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y})$ für eine allgemeine Funktion \vec{f} um die Ruhelage \vec{y}_0 ($\vec{f}(\vec{y}_0) = \vec{0}$) aussieht bzw. wie sich die Lösungen für t gegen Unendlich verhalten. Ausgehend von den im Falle linearer Systeme gefundenen Fällen definieren wir.

Definition 5.2.1. Die Ruhelage \vec{y}_0 System von DGL $\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y})$ heißt stabil, wenn

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) : \forall \vec{y} \text{ Lsg d. DGL mit } \|\vec{y}(0) - \vec{y}_0(0)\| < \delta \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ : \|\vec{y}(t) - \vec{y}_0(t)\| < \epsilon \quad (5.25)$$

Wenn man bei $t = 0$ nahe genug bei der Ruhelage startet, bleibt die Lösung für alle t nahe bei der Ruhelage.

Wenn die Ruhelage \vec{y}_0 des Systems $\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y})$ stabil ist und $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{y}(t) = \vec{y}_0$, dann heißt die Ruhelage asymptotisch stabil. Die Ruhelage heißt instabil, wenn sie nicht stabil ist.

$$(\exists \epsilon > 0) (\forall \delta > 0) : \exists \vec{y} \text{ Lsg d. DGL mit } \|\vec{y}(0) - \vec{y}_0(0)\| < \delta \quad \wedge \exists t \in \mathbb{R}^+ : \|\vec{y}(t) - \vec{y}_0(t)\| \geq \epsilon \quad (5.26)$$

Es gibt Lösungen, die beliebig nahe an der Ruhelage starten und die Kugel mit Radius ϵ verlassen.

Für die vorher diskutierten Fälle bei linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten ergibt sich

- anziehender Knotenpunkt: asymptotisch stabil
- abstoßender Knotenpunkt: instabil
- anziehender Strudelpunkt: asymptotisch stabil
- abstoßender Strudelpunkt: instabil
- Wirbelpunkt: stabil
- Sattelpunkt: instabil

Idee: Ersetze $\vec{f}(\vec{y})$ durch die erste Näherung, also die Linearisierung um die Ruhelage. Ab jetzt nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die Ruhelage $\vec{y}_0 = \vec{0}$ ist.

$$\vec{f}(\vec{y}) = A\vec{y} + \vec{g}(\vec{y}) \quad \text{mit} \quad \lim_{\|\vec{z}\| \rightarrow 0} \frac{\|\vec{g}(\vec{z})\|}{\|\vec{z}\|} = 0$$

Satz 5.1. Sei $\vec{f}(\vec{y}) = A\vec{y} + \vec{g}(\vec{y})$ mit $\lim_{\|\vec{z}\| \rightarrow 0} \frac{\|\vec{g}(\vec{z})\|}{\|\vec{z}\|} = 0$. Dann ist die Ruhelage $\vec{0}$ des Systems $\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y})$ asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben.

Die Ruhelage ist instabil, wenn ein Eigenwert positiven Realteil hat. Wenn der Realteil eines Eigenwertes 0 ist, so kann man anhand dieses Satzes keine Aussage treffen.

Beispiel 61.

$$\begin{aligned}x' &= \sin(x) + xy \\y' &= e^x - 1 + y + x^2 + y^2\end{aligned}$$

Dann ist $\vec{0}$ eine Ruhelage.

Wir betrachten die Jacobimatrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + y & x \\ e^x + 2x & 1 + 2y \end{pmatrix}$$

Am Punkt $\vec{0}$ ergibt dies:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial(x,y)} \Big|_{0,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ d.h., die Ruhelage ist instabil}$$

Da die Realteile der Eigenwerte positiv sind ($\lambda_{1,2} = +1$), ist die Ruhelage instabil.

Bemerkung: \vec{y}_0 mit $\vec{f}(\vec{y}_0) = \vec{0}$ ist ebenfalls eine Ruhelage des Systems \vec{y}' mit $\vec{f}(\vec{y})$.

Alle Überlegungen bleiben auch für diese Ruhelage richtig. Die Eigenwerte von $\frac{\partial \vec{f}}{\partial(x,y)} \Big|_{\vec{y}_0}$ entscheiden über das Verhalten des Lösungen und damit über die Stabilität der Ruhelagen, sofern der Realteil der Eigenwerte nicht 0 ist.

5.3 Stabilitätsuntersuchungen mit der Methode von Ljapunov

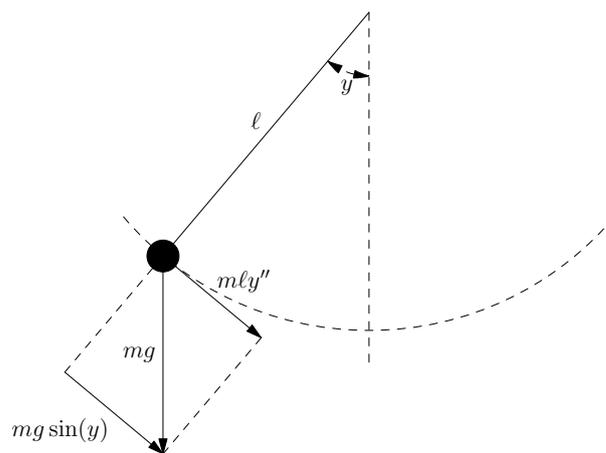


Abbildung 5.13: Fadenpendel

Beispiel 62. Gegeben sei

$$mly'' = -mg \sin(y)$$

Dies kann man auch anschreiben als

$$y'' = -\frac{g}{\ell} \sin(y)$$

Nun setzt man die Variablen:

$$\begin{aligned}y_1 &= y \\ y_2 &= y' = y_1'\end{aligned}$$

womit man folgende Gleichungen erhält:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{g}{\ell} \sin(y_1)\end{aligned}$$

Durch Linearisierung (für kleine y ist $\sin(y) = y$) erhält man

$$y_2' = -\frac{g}{\ell} y_1$$

Die Systemmatrix sieht dann aus wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & 0 \end{pmatrix}$$

und die Eigenwerte sind

$$\begin{aligned}\lambda^2 + \frac{g}{\ell} &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \pm i \sqrt{\frac{g}{\ell}}\end{aligned}$$

Da der Realteil 0 ist, kann man auf Grund des Satzes keine Aussage über die Stabilität des Systems treffen.

Auf Alexander M. Ljapunov geht die Idee zurück eine „Energiefunktion“ V zu betrachten, die in einer Umgebung der Ruhelage definiert und positiv ist. Die Ruhelage ist dann stabil, wenn die Energie entlang einer Lösung der Differentialgleichung nicht zunimmt, also die Ableitung der Energie entlang der Lösung ≤ 0 ist. Diese Idee wollen wir nun genauer ausführen und in Beispielen anwenden.

Eine Funktion $V : D \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit folgenden Eigenschaften heißt Ljapunov-Funktion

- D soll eine offene Umgebung der Ruhelage \vec{x}_R sein
- V ist differenzierbar auf D
- $V(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in D \Rightarrow \vec{x} = \vec{x}_R$

$$\forall \vec{x} \in D, \vec{x} \neq \vec{x}_R \quad V(\vec{x}) > 0.$$

Nun gilt für

$$\Phi(t) = V(\vec{y}(t)),$$

also die Energie entlang der Lösung der Differentialgleichung

$$\Phi'(t) = \langle \text{grad } V, \vec{y}'(t) \rangle = \langle \text{grad } V, \vec{f}(\vec{y}) \rangle.$$

Wir setzen nun

$$\dot{V}(\vec{x}) = \langle \text{grad } V(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x}) \rangle.$$

Wenn $\forall \vec{x} \in D, \vec{x} \neq \vec{x}_R$

- $\dot{V}(\vec{x}) \leq 0$ gilt, dann ist die Ruhelage \vec{x}_R stabil
- $\dot{V}(\vec{x}) < 0$ gilt, dann ist sie asymptotisch stabil
- $\dot{V}(\vec{x}) > 0$ gilt, dann ist sie instabil.

Beispiel 63. Man wählt als 1. Versuch

$$V(\vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{x}_R\|^2$$

Damit ist

$$\dot{V}(\vec{x}) = \left\langle 2(\vec{x} - \vec{x}_R), \vec{f}(\vec{x}) \right\rangle = 2 \left\langle (\vec{x} - \vec{x}_R), \vec{f}(\vec{x}) \right\rangle .$$

- Wenn

$$\dot{V}(\vec{x}) \leq 0 \text{ für } \|\vec{x} - \vec{x}_R\| < \delta :$$

Die Ruhelage x_R von $\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y})$ ist stabil.

- Wenn

$$\dot{V}(\vec{x}) < 0 \text{ für } \|\vec{x} - \vec{x}_R\| < \delta :$$

Die Ruhelage x_R von $\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y})$ ist asymptotisch stabil.

- Wenn

$$\dot{V}(\vec{x}) > 0 \text{ für } \|\vec{x} - \vec{x}_R\| < \delta :$$

Die Ruhelage x_R von $\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y})$ ist instabil.

Beispiel 64. Sei

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{g}{\ell} \sin(y_1) \\ \vec{x}_R &= \vec{0} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{V}(\vec{x}) &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= x_1 \cdot x_2 - \frac{g}{\ell} x_2 \sin(x_1) \end{aligned}$$

Diese Funktion kann beide Vorzeichen annehmen, also hilft sie hier nicht weiter.
Man versucht weiter:

$$\left\langle \text{grad } V, \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell} \sin(x_1) \end{pmatrix} \right\rangle \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} \sim \frac{g}{\ell} \sin(x_1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} \sim x_2$$

also

$$V(x_1, x_2) = \underbrace{\frac{g}{\ell}(1 - \cos(x_1))}_{>0 \text{ f. } -\pi < x_1 < \pi, x_1 \neq 0} + \underbrace{\frac{x_2^2}{2}}_{>0 \forall x_2 \neq 0}$$

Dies hat auf $D = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ die geforderten Eigenschaften einer Ljapunovfunktion und es gilt $\dot{V}(\vec{x}) = 0$. Also $\dot{V}(\vec{x}) = 0 \leq 0$ - Ruhelage ist stabil.

Beispiel 65. Sei

$$x' = \omega y + bx^2 - 2cxy + dy^2$$

$$y' = -\omega x + ax^2 - 2bxy + cy^2$$

wobei $a, b, c, d, \omega \in \mathbb{R}$. Um die Eigenwerte zu berechnen, vernachlässigt man Terme von Ordnung 2, die Eigenwerte sind $\pm i\omega$. Der Linearisierungssatz trifft also keine Aussage.

Wir versuchen

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\dot{V}(x, y) = 2x(\omega y + bx^2 - 2cxy + dy^2) + 2y(-\omega x + ax^2 - 2bxy + cy^2)$$

$$= 2(bx^3 + (a - 2c)x^2y + (d - 2b)xy^2 + cy^3)$$

Dieser Ausdruck kann beide Vorzeichen annehmen, (z.B. $x = 0$ setzen). liefert also kein Ergebnis.

Nächster Versuch:

$$V(x, y) = x^2 + y^2 + (Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3)$$

Bemerkung: für $0 < x^2 + y^2 < \delta$ gilt $V(x, y) > 0$

$$\dot{V}(x, y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y}$$

$$= (2x + 3Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) \cdot (\omega y + bx^2 - 2cxy + dy^2) +$$

$$(2y + Bx^2 + 2Cxy + 3Dy^2)(-\omega x + ax^2 - 2bxy + cy^2)$$

Multipliziert man dies aus, so ergibt sich

$$\dot{V}(x, y) = 2\omega xy + 2bx^3 - 4cx^2y + 2dxy^2 + 3Ax^2\omega y + 3Abx^4 - 6Acx^3y + 3Adx^2y^2$$

$$+ C\omega y^3 + Cbx^2y^2 - 2Ccx^3y + dxy^4 + 2Bx\omega y^2 + 2Bbx^3y - 4Bcx^2y^2 + 2Bxy^3d$$

$$- 2\omega xy + 2ax^2y - 4bxy^2 + 2cy^3 - B\omega x^3 + Bax^4 - 2Bbx^3y + Bcx^2y^2 - 2C\omega x^2y$$

$$+ 2Cax^3y - 4Cbx^2y^2 + 2Ccx^3y - 3D\omega xy^2 + 3Dy^2ax^2 - 6Dbxy^3 + 3Dcy^4$$

Nun führt man wieder Koeffizientenvergleich durch:

$$x^3 : 2b - B\omega = 0 \quad \Rightarrow B = \frac{2b}{\omega} \quad (5.27)$$

$$x^2y : -4c + 3A\omega + 2a - 2C\omega = 0 \quad \Rightarrow A = \frac{-2a}{3\omega} \quad (5.28)$$

$$xy^2 : 2d + 2B\omega - 4b - 3D\omega = 0 \quad \Rightarrow D = \frac{2d}{3\omega} \quad (5.29)$$

$$y^3 : C\omega + 2c = 0 \quad \Rightarrow C = \frac{-2c}{\omega}. \quad (5.30)$$

Mit dieser Wahl von A , B , C und D fallen die Terme 3. Ordnung weg. Außerdem verschwinden die Terme 4. Ordnung.

Damit gilt $\dot{V}(x, y) = 0$, die Energie ist also entlang der Lösungen der Differentialgleichung konstant. Nach Konstruktion ist V in einer Umgebung der Ruhelage eine Ljapunov-Funktion. Damit ist die Ruhelage in diesem Beispiel stabil.

Tatsächlich können wir hier wegen $\dot{V}(x, y) = 0$ mehr sagen: die Lösungen des Systems sind Niveaulinien der Ljapunov-Funktion $V(x, y)$.

Index

- Anfangswertproblem, 32
- Cauchysche Integralformel, 58
- Cauchyscher Integralsatz, 55
- Differentialgleichung
 - exakte, 36
 - getrennte Variable, 34
 - inhomogene lineare, 38
 - linear mit konstanten Koeffizienten, 40
 - lineare, 37
- Divergenz, 19
- Doppelintegral, 4
- einfach zusammenhängend, 25
- Euler-Verfahren, 32
- Fluss, 19
- Fundamentalsatz der Algebra, 82
- Fundamentalsystem, 96
- Funktion
 - harmonisch, 64
 - holomorphe, 53
 - konjugiert harmonische, 64
 - meromorphe, 73
- Gradientenfeld, 18
- harmonische Funktion, 64
- hebbare Singularität, 62
- holomorph, 53
- Integralformel
 - Cauchysche, 58
 - Poissonsche, 69
- Integralsatz
 - von Gauß im Raum, 28
 - von Gauß in der Ebene, 24
 - von Stokes, 27
- Kette, 69
- Knotenpunkt
 - abstoßender, 102
 - anziehender, 102
- konjugiert harmonische Funktion, 64
- Laplace
 - Operator, 19
 - Transformation, 83
 - Tabelle, 84
- Laplace-Gleichung, 64
- Laurent-Reihe, 72
- Linearisierungssatz, 109
- Ljapunov-Funktion, 111
- Logarithmisches Residuum, 81
- meromorph, 73
- Normalbereich, 5
- Obersumme, 3
- Ordnung der Nullstelle, 60
- Poissonsche Integralformel, 69
- Pol der Ordnung, 62
- Potentialgleichung, 64
- Prinzip vom Argument, 81
- quellenfrei, 29
- Residuen-Satz, 73
- Residuum, 73
- Resonanz
 - innere, 41
 - äußere, 44
- Riemann-integrierbar, 3
- Rotation, 19
- Ruhelage, 101
 - instabile, 109
 - stabile, 109
- Ruhezone, 105
- Sattelpunkt, 105
- Satz von
 - Fubini, 4
 - Gauß im Raum, 28
 - Gauß in der Ebene, 24
 - Rouché, 82

Stokes, 27
Singularität
 hebbare, 62
 wesentliche, 62
Stammfunktion eines Vektorfeldes, 18
Strudelpunkt, 107
Substitutionsregel, 7

Transformation
 Laplace-, 83
Transformationsregel
 für Doppelintegrale, 8
 für Dreifachintegrale, 12

Untersumme, 3

Variation der Konstanten, 96
Variation der Konstanten, 38
Vektorfeld, 15
 quellenfreies, 29
 wirbelfreies, 29

wegunabhängig, 17, 25
wesentliche Singularität, 62
wirbelfrei, 29
Wirbelpunkt, 107

Zylinderkoordinaten, 14