11. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\iint_{\mathcal{O}} y\, dy \wedge dz + z\, dz \wedge dx + x\, dx \wedge dy,$$

wobei die Fläche $\mathcal{O}$ durch

$$\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \wedge z = x^2 - y^2\}$$

gegeben ist. Dabei ist die Orientierung so zu wählen, dass der Normalvektor in $(0, 0, 0)$ positive z-Koordinate hat.

12. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\oiint_{\mathcal{O}} x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy,$$

wobei $\mathcal{O}$ die Berandung des Bereichs

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$$

bezeichnet.

13. Seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zwei feste Punkte auf der Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1\}$. Berechnen Sie das (skalare) Oberflächenintegral

$$\oiint_{\mathbb{S}^2} \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle\, do(\vec{z}).$$

14. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie für alle $\mathbf{x} \in U$

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{4\pi r^2} \oiint_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=r} f(\mathbf{y})\, do(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \right) = \frac{1}{6} \Delta f(\mathbf{x}).$$

Hinweis: ersetzen Sie f um $\mathbf{x}$ durch das Taylor-Polynom zweiter Ordnung und nützen Sie Symmetrien aus.