15. Weisen Sie den Integralsatz von Stokes für das Kurvenintegral

$$\oint_C xy\,dx + yz\,dy + xz\,dz$$

nach, wobei C die Berandung der Fläche

$$\mathcal{O} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2, |x| \leq 1, |y| \leq 1\right\}$$

bezeichnet.

16. Weisen Sie den Integralsatz von Gauß für das Oberflächenintegral

$$\oiint_{\mathcal{O}} x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$$

nach, wobei $\mathcal{O}$ die Berandung des Körpers

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z \leq 16, \quad z \geq 0\right\}$$

bezeichnet.

17. Zeigen Sie für skalare Funktionen f, g und Vektorfelder $\vec{V}, \vec{W}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(fg) &= f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f \\
\operatorname{div}(f\vec{V}) &= \langle \operatorname{grad} f, \vec{V} \rangle + f \operatorname{div}(\vec{V}) \\
\operatorname{rot}(f\vec{V}) &= \operatorname{grad}(f) \times \vec{V} + f \operatorname{rot} \vec{V} \\
\operatorname{div}(\vec{V} \times \vec{W}) &= \langle \vec{W}, \operatorname{rot} \vec{V} \rangle - \langle \vec{V}, \operatorname{rot} \vec{W} \rangle
\end{aligned}$$

18. Sei $\mathcal{F}$ eine Fläche mit nach oben weisendem Normalvektor, deren Rand der Einheitskreis $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ ist. Überlegen Sie, dass der Wert des Integrals

$$\iint_{\mathcal{F}} z^2\,dy \wedge dz + x^2\,dz \wedge dx + y^2\,dx \wedge dy$$

nicht von der Fläche $\mathcal{F}$ abhängt. Benutzen Sie diese Überlegung, um das Integral zu bestimmen.