

19. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

$$(a) \quad y' = \frac{x^3}{e^{2y}}$$

$$(b) \quad y' = \frac{x}{y} - \frac{x}{1+y}$$

$$(c) \quad xy' = y(3-x)$$

20. Skizzieren Sie die Lösung des Anfangswertproblems für $t \in [0, 2]$ unter Verwendung des Euler-Polygons mit $h = 0.5$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0.1x(1 - 0.1y) \\ \dot{y} &= -0.5y(1 - 0.2x) \\ x(0) &= 4, \quad y(0) = 8\end{aligned}$$

21. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen

$$(a) \quad x(x^2 + y^2)dx + (1 - y^2 + x^2y)dy = 0$$

$$(b) \quad (e^x + y^2)dx + 2xy dy = 0$$

22. Bestimmen Sie Näherungen an die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = xy = f(x, y), \quad y(0) = 1,$$

indem Sie die im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf verwendete Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned}y_0(x) &= 1 \\ y_{n+1}(x) &= 1 + \int_0^x f(t, y_n(t)) dt\end{aligned}$$

dreimal anwenden. Vergleichen Sie $y_3(x)$ im Intervall $[0, 1]$ graphisch mit der tatsächlichen Lösung.