1. Berechnen Sie das Integral:
$$\iint_B f(x,y)\,dxdy,$$
mit $B = [-1,1] \times [0,2]$ und $f(x,y) = \sqrt{|y-x^2|}$.

2. Berechnen Sie das Integral
$$\iint_B (x+y)^2\,dx\,dy$$
über die folgenden Bereiche
   (a) $B = [-1,1] \times [0,2]$
   (b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge x^3 \leq y \leq x\}$
   (c) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 2\}$
   (d) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + |y| \leq 4\}$

3. Berechnen Sie:
$$\iiint_B f(x,y,z)\,dxdydz,$$
wobei
a) B durch $x^2 + y^2 = 2z$ und $z = 2$ begrenzt wird und $f(x,y,z) = x^2 + y^2$.
b) $B = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; |x| + |y| + |z| \leq 1\right\}$ und $f(x,y,z) = z$.

4. Berechnen Sie
$$\iiint_B f(x,y,z)\,dxdydz,$$
für
a) $B = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 6x + 8y\right\}$ und $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.
b) $B = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4x, y, z \geq 0\right\}$ und $f(x,y,z) = z$.

5. Berechnen Sie das Integral
$$\iint_B xy(x+y)\,dx\,dy$$
über $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x, y \geq 0\}$.

6. Berechnen Sie das Volumen der Körper, die von den angegebenen Flächen begrenzt werden:
a) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = xyz$
b) $z^2 = (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2$

7. Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral
$$\int_C \Big(3x^2(1+y^2)z\,dx + 2x^3yz\,dy + x^3(1+y^2)\,dz\Big)$$
wegunabhängig ist und berechnen Sie den Wert des Integrals entlang eines Weges von $(0,0,1)$ nach $(2,4,1)$.

8. Sei G ein Gebiet mit $G = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, -\sin x \le y \le \cos x\}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral
$$\int_{\partial G} \Big(2y\cosh y + (x^2-y^2)\sinh y\Big)\cos x\,dx + \Big(2x\cos x + (x^2-y^2)\sin x\Big)\cosh y\,dy$$
über den Rand des Gebietes G, indem Sie den Gaußschen Integralsatz anwenden.

9. Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich mit glatter Randkurve ∂B und $f : B \to \mathbb{R}^+$ eine differenzierbare Funktion, die auf ∂B verschwindet (Null ist). Berechnen Sie
$$\iint_{\mathcal{O}} x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$$
für die durch
$$\mathcal{O} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in B, z = f(x,y)\}$$
gegebene Fläche direkt unter Verwendung der Parametrisierung $z = f(x,y)$. Verwenden Sie einen geeigneten Integralsatz, um das Ergebnis zu interpretieren.

10. Das Flächenstück B ist durch
$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1, z = x^2 - y^2\right\}$$
gegeben. Weisen Sie den Integralsatz von Stokes für das Vektorfeld
$$\vec{V} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$
und das Kurvenintegral $\oint_{\partial B} \vec{V}\,d\vec{x}$ nach.

11. Berechnen Sie das Oberflächenintegral
$$\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{o},$$
wobei
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x^2 + \sin y \\ y^2 + \cos z \\ z^2 + e^x \end{pmatrix}$$
und ∂B die Oberfläche der Pyramide mit den Eckpunkten $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$ und $D(1,0,1)$ ist.

12. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\iint_{\mathcal{O}} (x^2 - xy)\, dy \wedge dz + (1 - 3y + z)\, dz \wedge dx + (-xz)\, dx \wedge dy.$$

Dabei ist $\mathcal{O}$ die Oberfläche des Paraboloids $z = x^2 + y^2,\ z \leq 4$ mit nach oben gerichtetem Normalvektor bezeichnet.

13. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C (x^2 - y^3 + z^2)\, dx + (xy - z^2)\, dy + 2xz\, dz.$$

Dabei ist C die Schnittkurve der beiden Flächen $(x-y)^2 + z^2 = 2$ und $x+y+z=0$, die von $P(1,1,1)$ aus gesehen entgegen dem Uhrzeigersinn orientiert ist.

14. Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y^2 \\ x - z^2 \end{pmatrix}$$

und die Fläche F mit

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2,\ z \leq 1\}$$

15. Berechnen Sie den Fluss Φ des Vektorfeldes $\vec{v}(x,y,z)$ durch die Fläche S:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2xy + z \\ y^2 \\ -x - 3y \end{pmatrix}, \qquad S:\ 2x + 2y + z = 6, \quad x,y,z \geq 0.$$

16. Weisen Sie den Integralsatz von Gauß für das Oberflächenintegral

$$\oiint_{\mathcal{O}} x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy$$

nach, wobei $\mathcal{O}$ die Berandung des Körpers

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z \leq 16, \quad z \geq 0\right\}$$

bezeichnet.