25. Sei $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Geben Sie unter Verwendung des Vektorprodukts Formeln für die kontravariante Basis $\vec{w}^1, \vec{w}^2, \vec{w}^3$ an.

26. Bestimmen Sie zu der durch die Ableitungen der räumlichen Polarkoordinaten gegebenen Basis die zugehörige kontravariante Basis des $\mathbb{R}^3$.

27. Durch die Parametrisierung

$$\vec{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} \cosh(u^1)\cos(u^2) \\ \cosh(u^1)\sin(u^2) \\ u^1 \end{pmatrix}, \quad u^1 \in \mathbb{R}, \quad u^2 \in [0, 2\pi]$$

wird eine Fläche beschrieben. Geben Sie zu der durch die Parametrisierung gegebenen Basis die kontravariante Basis des Tangentialraumes an.

28. Rechnen Sie den Gradienten im $\mathbb{R}^3$ in räumliche Polarkoordinaten um.

29. Berechnen Sie das Potential

$$G \iiint\limits_K \frac{\rho}{r}\, dx\, dy\, dz$$

einer homogenen Kugelschale

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid R_1^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R_2^2\}$$

auf einen innerhalb liegenden Punkt P, wobei r den Abstand des Punktes P zum laufenden Raumelement bezeichnet ($\rho, G = \text{const.}$). Berechnen Sie analog dazu das Potential auf einen festen Punkt außerhalb einer Vollkugel.