

30. Bestimmen Sie für den in Beispiel 17 betrachteten Torus $\mathbb{T}$ die Oberflächenintegrale

$$(a) \iint_{\mathbb{T}} do \text{ und } (b) \iint_{\mathbb{T}} K do,$$

wobei K die Gaußsche Krümmung bezeichnet.

31. Sei $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen) zweimal stetig differenzierbar. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{4\pi} \iint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1} u(x + r\xi, y + r\eta, z + r\zeta) do(\xi, \eta, \zeta) - u(x, y, z) \right).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Taylor-Formel.

32. Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(r) = \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Bestimmen Sie $F'(r)$. Hinweis: Polarkoordinaten.

33. Bestimmen Sie das Oberflächenintegral

$$\iint_{\|\vec{x}\|=1} \frac{do(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}$$

als Funktion von $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Was ergibt sich jeweils für $\|\vec{y}\| < 1$ bzw. $\|\vec{y}\| > 1$? Geben Sie eine Erklärung des Ergebnisses unter Verwendung der Tatsache, dass $1/\|\vec{x} - \vec{y}\|$ das elektrostatische Potential ist.