43. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\oiint_{\mathcal{O}} x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy,$$

wobei $\mathcal{O}$ die Berandung des Bereichs

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$$

bezeichnet. Verifizieren Sie in diesem Beispiel den Integralsatz von Gauss.

44. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\iint_{\mathcal{O}} y\,dy \wedge dz + z\,dz \wedge dx + x\,dx \wedge dy,$$

wobei die Fläche $\mathcal{O}$ durch

$$\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \wedge z = 4 - x^2 - y^2\}$$

gegeben ist. Dabei ist die Orientierung so zu wählen, dass der Normalvektor in $(0, 0, 0)$ positive z-Koordinate hat. Wie können Sie den Integralsatz von Gauss verwenden, um die Aufgabe zu vereinfachen?

45. Es seien f und g zwei skalare Funktionen aus $\mathcal{C}^2(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, und $B \subseteq U$. Zeigen Sie die Identitäten

(i)
$$\oiint_{\partial B} f \operatorname{grad}(g) \cdot d\mathbf{o} = \iiint_B \Big(\operatorname{grad}(f) \cdot \operatorname{grad}(g) + f\Delta g\Big)\, dx\, dy\, dz$$

und

(ii)
$$\oiint_{\partial B} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\right) do = \iiint_B \Big(f\Delta g - g\Delta f\Big)\, dx\, dy\, dz,$$

wobei Δ der Laplace-Operator ist und $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ die Richtungsableitung in Richtung des nach außen gerichteten Normalvektors bezeichnet.

Zeigen Sie, dass die linke Seite der Identität **(ii)** verschwindet, wenn f und g zusätzlich die symmetrischen Randbedingungen

$$\lambda f + \mu \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = 0, \qquad \lambda g + \mu \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = 0$$

auf ∂B erfüllen, wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

46. Rechnen Sie die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{V}(x, y, z)$ in räumliche Polarkoordinaten um.

47. Verwenden Sie das Ergebnis aus Beispiel 46 und die bereits bekannte Darstellung des Gradienten in Polarkoordinaten, um den Laplace-Operator in räumlichen Polarkoordinaten darzustellen.