

48. Finden Sie für differenzierbare Funktionen f und g bzw. ein Vektorfeld $\vec{V}$ Vereinfachungen für die folgenden Ausdrücke:

$$(a) \quad \nabla fg \quad (b) \quad \nabla f \vec{V} \quad (c) \quad \nabla \times f \vec{V}$$

49. Zeigen Sie die folgenden Gleichungen für Vektorfelder $\vec{V}$ und $\vec{W}$ (beachten Sie die richtige Interpretation der Wirkung von ∇ !)

$$\begin{aligned} (a) \quad & \nabla \times (\vec{V} \times \vec{W}) = (\vec{W} \cdot \nabla) \vec{V} - (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{W} - (\nabla \cdot \vec{V}) \vec{W} + (\nabla \cdot \vec{W}) \vec{V} \\ (b) \quad & \nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V} \\ (c) \quad & \nabla(\vec{V} \cdot \vec{W}) = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{W} + (\vec{W} \cdot \nabla) \vec{V} + \vec{V} \times (\nabla \times \vec{W}) + \vec{W} \times (\nabla \times \vec{V}). \end{aligned}$$

50. Bestimmen Sie zu dem quellenfreien Vektorfeld

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + yz \\ -y - xz \\ -z + xy \end{pmatrix}$$

ein Vektorpotential.

51. Sei $\vec{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein wirbelfreies Vektorfeld und U ein bezüglich $\vec{0}$ sternförmiges Gebiet. Sei

$$\phi(\vec{x}) = \int_0^1 \vec{V}(t\vec{x}) \cdot \vec{x} dt$$

das zugehörige Potential. Berechnen Sie unter Verwendung geeigneter Identitäten für ∇ (analog zur Vorlesung) $\nabla \phi$.

52. Die Funktionen f_n und g_n ($n \in \mathbb{N}_0$) sind durch

$$f_n(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^n \quad \text{und} \quad g_n(x, y) = \operatorname{Im}(x + iy)^n$$

gegeben ($i^2 = -1$). Zeigen Sie, dass diese Funktionen die Gleichung $\Delta f_n = \Delta g_n = 0$ erfüllen. Rechnen Sie diese Funktionen in ebene Polarkoordinaten um.