53. Kann der Tensor $\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1$ in der Form $\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2$ geschrieben werden?

54. Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann
$$\nabla f(\|\vec{x}\|) = \frac{f'(\|\vec{x}\|)}{\|\vec{x}\|}\vec{x}$$
gilt.

55. Jeder Punkt $\vec{x} \neq \vec{0}$ des $\mathbb{R}^3$ kann in der Form $\vec{x} = r\vec{\xi}$ mit $\|\vec{\xi}\| = 1$ geschrieben werden. Der Laplace-Operator Δ_S auf die Sphäre $\|\vec{\xi}\| = 1$ ist durch
$$\Delta_S f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial u^j} \right)$$
gegeben (zB in Polarkoordinaten mit $r = 1$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Zeigen Sie, dass dann für den Laplace-Operator Δ in $\mathbb{R}^3$
$$\Delta g = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_S g(r\vec{\xi})$$
gilt.

56. Sei $g(x, y, z)$ eine homogenes Polynom vom Grad n, also ein Polynom, für das $g(r\vec{\xi}) = r^n g(\vec{\xi})$ gilt, bzw. ein Polynom, bei dem alle Terme den selben Gesamtgrad n haben. Sei g darüber hinaus harmonisch, also eine Lösung der Gleichung $\Delta g = 0$.
   (a) Finden Sie solche homogenen harmonischen Polynome für $n = 1, 2, 3$.
   (b) Zeigen Sie, dass für ein homogenes harmonisches Polynom g vom Grad n
   $$\Delta_S g(\vec{\xi}) = -n(n + 1) g(\vec{\xi})$$
   für $\|\vec{\xi}\| = 1$ gilt.

57. Zeigen Sie, dass durch
$$\langle P, Q \rangle = P \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) Q(x, y, z) \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)}$$
ein nicht ausgeartetes symmetrisches Skalarprodukt auf dem Vektorraum der Polynome in drei Variablen $\mathbb{R}[x, y, z]$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass
$$\langle r^2 P, Q \rangle = \langle P, \Delta Q \rangle, \quad \text{mit } r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
gilt (Δ bezeichnet den Laplace-Operator).