Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Integralrechnung für Funktionen in mehreren Variablen

Gegeben sei $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$, A beschränkt. Wir suchen das Volumen des Bereiches

$$\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_d, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} | (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in A \wedge 0 \leq x_{d+1} \leq f(x_1, \ldots, x_d)\right\}.$$

Für $d = 2$ und die Grundfläche $A = [a, b] \times [c, d]$, $f : A \to \mathbb{R}^+$ wählen wir $\mathfrak{Z}_1$ eine Zerlegung von $[a, b] : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ und $\mathfrak{Z}_2$ eine Zerlegung von $[c, d] : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$.

Wir setzen

$$m_{ij} = \inf_{(x,y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]} f(x, y)$$
$$M_{ij} = \sup_{(x,y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]} f(x, y)$$

und erhalten damit die Untersumme

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

und die Obersumme

$$\overline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

Definition 1.0.1. Das obere Riemann-Darboux-Integral ist gegeben durch

$$\overline{\iint_{[a,b] \times [c,d]}} f(x, y)\, dx\, dy := \inf_{\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2} \overline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2)$$

Das untere Riemann-Darboux-Integral ist gegeben durch

$$\underline{\iint_{[a,b] \times [c,d]}} f(x, y)\, dx\, dy := \sup_{\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2} \underline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2)$$

Definition 1.0.2. Eine Funktion $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar auf $[a,b] \times [c,d]$, wenn

$$\overline{\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]}} f(x,y)\,dx\,dy = \underline{\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]}} f(x,y)\,dx\,dy,$$

Wir schreiben dann:

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$$

für den gemeinsamen Wert.

Die Frage stellt sich, wie man diesen Wert berechnen kann, wenn er existiert.

Wir nehmen an, dass

$$A = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$$

existiert. Dann gilt wegen der Definition von A

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) \leq A \leq \overline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2).$$

Wir schätzen weiter Ober- und Untersumme durch Integrale ab

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(y_{j+1}-y_j) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\overline{S}(f(x_i,y), \mathfrak{Z}_2) \geq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\int_c^d f(x_i,y)\,dy\end{aligned}$$

und daher

$$\overline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) \geq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\int_c^d f(x_i,y)\,dy.$$

Analog erhalten wir

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) \leq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\int_c^d f(x_i,y)\,dy.$$

Sei nun

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy,$$

dann steht in der letzten Zeile gerade eine Riemannsche Zwischensumme für das Integral

$$\int_a^b g(x)\,dx.$$

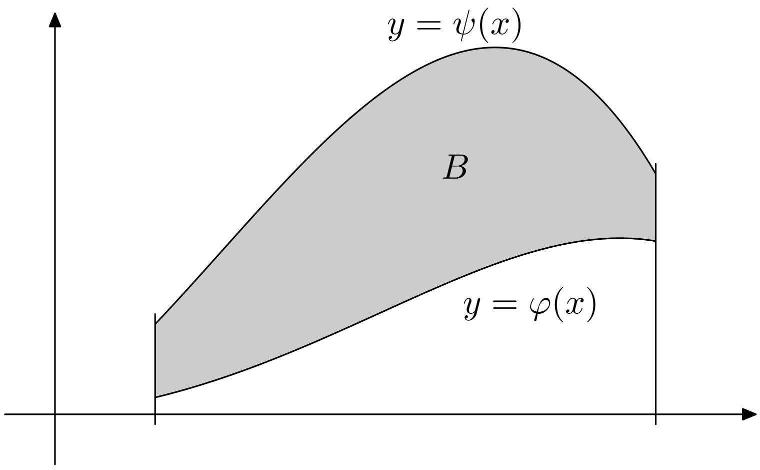

Abbildung 1.1: Normalbereich bezüglich der x-Achse

Mit dieser Überlegung erhalten wir

$$A = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right)\,dx = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy.$$

A heißt Doppelintegral oder Zweifachintegral.

Satz 1.1 (Satz von FUBINI)**.** *Sei f stetig auf $[a,b] \times [c,d]$. Dann gilt*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right)\,dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right)\,dy = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Bemerkung 1. Stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar.

Beispiel 1. Es ist das Volumen von folgendem Bereich gesucht:

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le xy \right\}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy\,dy \right)\,dx = \int_0^1 x\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4}$$

1.1 Integrale über Normalbereiche

Definition 1.1.1. Eine Teilmenge der Ebene der Form:

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x) \right\}$$

mit zwei gegebenen Funktionen φ, ψ heißt ein Normalbereich bezüglich der x-Achse. Ein Normalbereich bezüglich der y-Achse wird so dargestellt:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\right\}$$

Wir gehen von einem Normalbereich

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a,b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\right\}$$

aus und wollen für $f : B \to \mathbb{R}$ das Integral

$$\iint\limits_B f(x,y)\, dx\, dy$$

erklären und berechnen.

Wähle c, d so, dass $B \subseteq [a,b] \times [c,d]$ und setze

$$\widehat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{für } (x,y) \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iint\limits_B = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \widehat{f}(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d \widehat{f}(x,y)\, dy\right) dx$$
$$= \int_a^b \left(\int_c^{\varphi(x)} 0\, dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy + \int_{\psi(x)}^d 0\, dy\right) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy\right) dx$$

Bemerkung 2. Wenn B ein Normalbereich bezüglich der x-Achse ist gilt für

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a,b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\right\}$$

und es gilt:

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \widehat{f}(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy\right) dx.$$

Wenn C ein Normalbereich bezüglich der y-Achse ist, gilt für

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [c,d], \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\right\}$$

dann gilt

$$\iint\limits_C f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\, dx\right) dy.$$

Beispiel 2. Berechne das Volumen unter $f(x,y) = y$ über den Bereich

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\right\} \end{aligned}$$

1. Methode:

$$\iint\limits_B y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{6}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

2. Methode:

$$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(yx \bigg|_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} \right) dy$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(y\sqrt{1-y^2} - \left(-y\sqrt{1-y^2}\right)\right) dy &= \int_0^1 2y\sqrt{1-y^2}\,dy \\ &\qquad (u = 1-y^2,\ du = -2y\,dy) \\ &= \int_{u=1}^{u=0} \sqrt{u}\,(-\,du) = \int_{u=0}^{u=1} u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

1.2 Substitutionsregel

Wir wollen bei der Berechnung von $\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$ neue Variablen u und v, $x = x(u,v), y = y(u,v)$ einführen. Es soll also für eine Variablentransformation

$$\begin{aligned} T : C &\to B \\ (u,v) &\mapsto (x(u,v), y(u,v)) \end{aligned}$$

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_C f(x(u,v), y(u,v)) \quad ???\ du\,dv$$

gelten, wobei wir den "Umrechnungsfaktor" $???$ noch bestimmen müssen.

Um zu verstehen, woher der Faktor ??? kommt, wollen wir die Substitutionsregel für einfache Integrale noch einmal analysieren:

$$\int_a^b f(T(u))T'(u)\,dx = \int_{T(a)}^{T(b)} f(x)\,dx \approx R(f,\mathfrak{Z},\Xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$$
$$x_i = T(u_i), \xi_i = T(\eta_i)$$

Nach dem Mittelwertsatz können wir $x_{i+1} - x_i = T'(\tilde{\eta}_i)(u_{i+1} - u_i)$ schreiben und behalten

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(T(\eta_i))T'(\tilde{\eta}_i)(u_{i+1}-u_i).$$

Der Faktor $T'(\tilde{\eta}_i)$ kann als Umrechnungsfaktor zwischen der Längenmessung in der "u-Welt" zur Längenmessung in der "x-Welt" interpretiert werden. (Abb. 1.2)

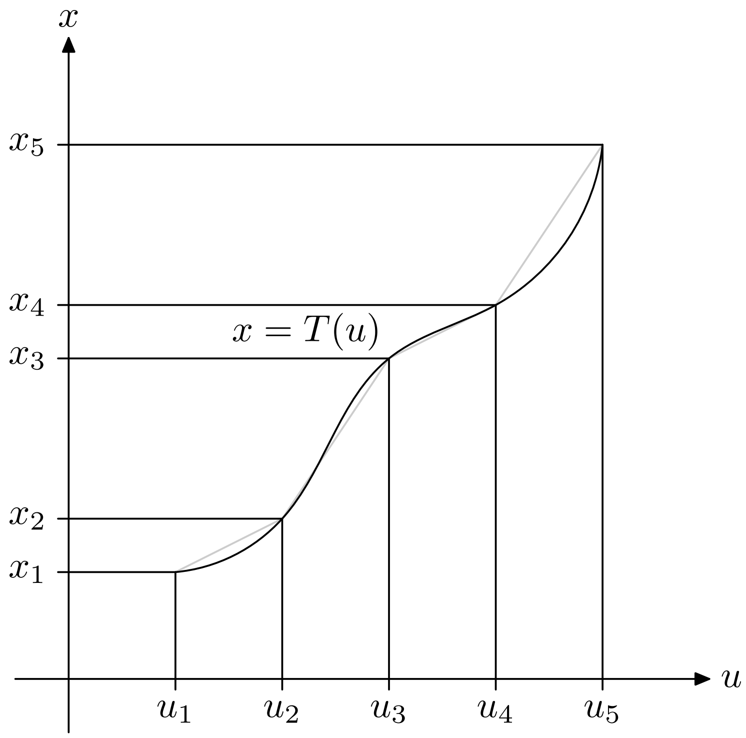

Abbildung 1.2: Umrechnung von u auf x

Wir müssen also verstehen, wie sich die Fläche von Teilrechtecken $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ der

Zerlegung unter der Transformation T verändert. Dazu betrachten wir die ersten Näherungen

$$x(u,v) = x(u_i,v_j) + \frac{\partial x}{\partial u}(u_i,v_j)(u-u_i) + \frac{\partial x}{\partial v}(u_i,v_j)(v-v_j) + \quad \text{Fehler}$$
$$y(u,v) = y(u_i,v_j) + \frac{\partial y}{\partial u}(u_i,v_j)(u-u_i) + \frac{\partial y}{\partial v}(u_i,v_j)(v-v_j) + \quad \text{Fehler}$$

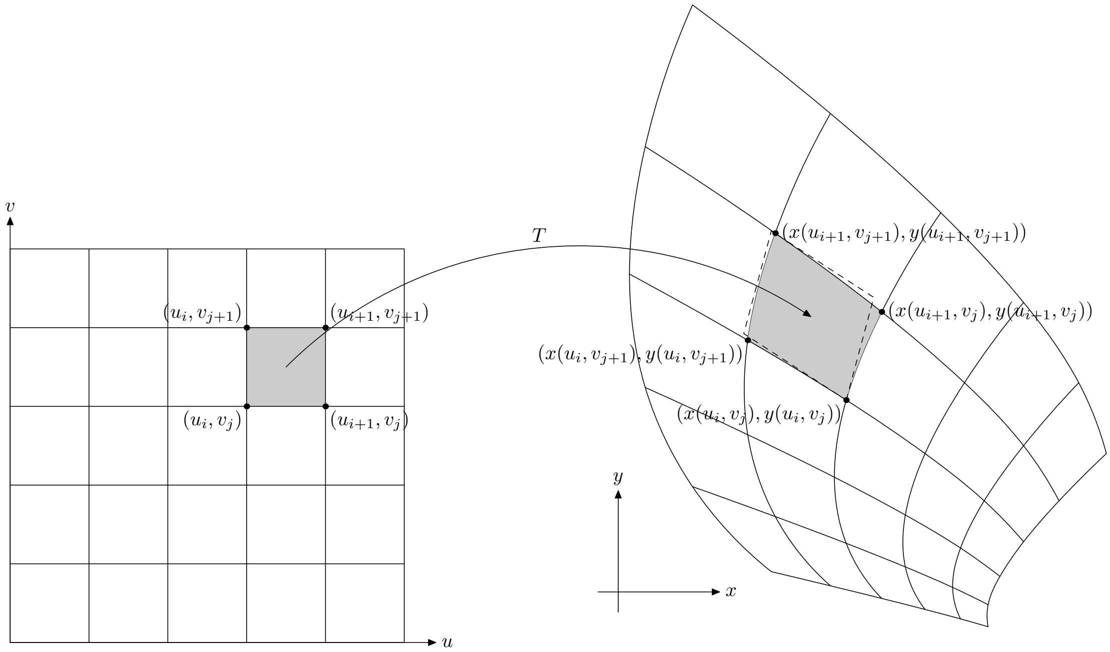

Abbildung 1.3: Zur Variablentransformation

Die Fläche von $T([u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}])$ ist also annähernd gleich der Fläche des von den Tangentialvektoren in (u_i, v_j) aufgespannten Parallelogramms (Abb. 1.3). Diese Fläche ist gleich

$$\left|\frac{\partial x}{\partial u}(u_i,v_j)\frac{\partial y}{\partial v}(u_i,v_j) - \frac{\partial x}{\partial v}(u_i,v_j)\frac{\partial y}{\partial u}(u_i,v_j)\right|(u_{i+1}-u_i)(v_{j+1}-v_j).$$

Damit kann man erwarten, dass

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} m_{ij}\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|(u_i,v_j)(u_{i+1}-u_i)(v_{j+1}-v_j)$$

ungefähr die Riemann-Summe des transformierten Integrals ist. Dies ist eine Riemann-Summe für das Integral

$$\iint_B f(T(u,v)) \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\end{pmatrix}\right| \, du\, dv.$$

Damit haben wir folgenden Satz motiviert.

Satz 1.2. *(Transformationsregel für Doppelintegrale:) Sei $T : B \to \mathbb{R}^2$ eine einmal stetig differenzierbare, injektive Abbildung, dann gilt:*

$$\iint\limits_{T(B)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{B} f(T(u,v)) \left|\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}\right| du\,dv$$

für alle Riemann-integrierbaren Funktionen.

Beispiel 3.

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\right\} \qquad \text{die Einheitskreisscheibe}$$

Wir wollen

$$\iint\limits_B x^2\,dx\,dy$$

berechnen, indem wir Polarkoordinaten einführen:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} T(r,\varphi)$$

$$T^{(-1)}(B) = \{(r,\varphi)|0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \qquad \text{Einheitskreisscheibe in Polarkoordinaten}$$

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

$$\iint\limits_B x^2\,dx\,dy = \iint\limits_{T^{(-1)}(B)} r^2\cos^2\varphi\, r\,dr\ d\varphi = \int_{r=0}^{r=1}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r^3\cos^2\varphi\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^1 r^3\,dr \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{r^4}{4}\bigg|_0^1 \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = A$$

$$2A = \int_0^{2\pi}(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi = 1\bigg|_0^{2\pi} \Rightarrow A = \pi$$

$$\Rightarrow \int_0^1 r^3\,dr \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$$

Bemerkung 3. Transformationregel für die Umrechnung auf Polarkoordinaten:

$$\iint\limits_{T(B)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi$$

Beispiel 4. Wir wollen das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

bestimmen. Dies ist zu verstehen als der Grenzwert

$$I = \lim_{R\to\infty} I(R)$$

mit

$$I(R) = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx.$$

Wir betrachten

$$I(R)^2 = \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_{[-R,R]\times[-R,R]} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Das Quadrat $[-R,R]\times[-R,R]$ enthält den Kreis mit Radius R und ist selbst im Kreis mit Radius $R\sqrt{2}$ enthalten. Damit gilt

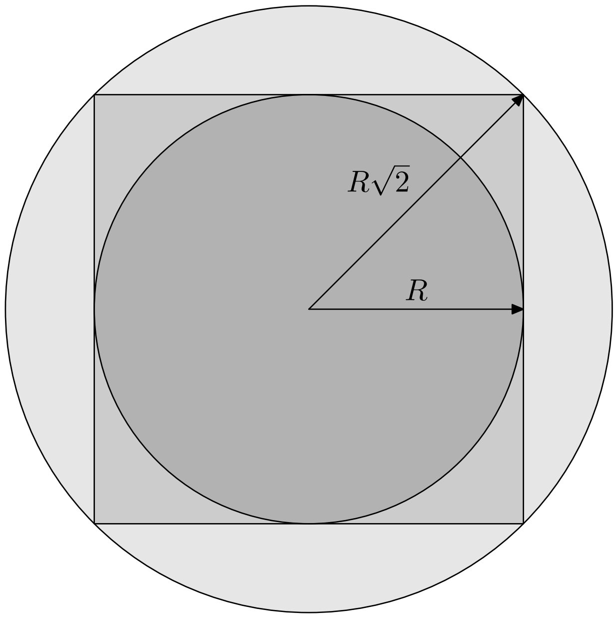

Abbildung 1.4: Die Integrationsbereiche

$$\iint_{x^2+y^2\le R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \le I(R)^2 \le \iint_{x^2+y^2\le 2R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Indem wir nun Polarkoordinaten substituieren, erhalten wir

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{r=0}^{r=R}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^R re^{-r^2}\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi\int_0^R 2re^{-r^2}\,dr.$$

Das letzte Integral können wir durch Substitution leicht berechnen

$$u = r^2, du = 2r\,dr$$

$$\pi\int_0^R 2re^{-r^2}\,dr = \pi\int_0^{R^2} e^{-u}\,du = \pi(-e^{-u})\Big|_0^{R^2} = \pi(1-e^{-R^2}).$$

Damit erhalten wir die Ungleichung

$$\pi(1-e^{-R^2}) \le I(R)^2 \le \pi(1-e^{-2R^2}),$$

woraus durch Grenzübergang $R\to\infty$

$$\lim_{R\to\infty} I(R)^2 = \pi$$

und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

folgt.

1.3 Dreifachintegrale

Motivation:
$B \in \mathbb{R}^3$ beschreibt einen Körper; $\rho(x,y,z)$-Dichte des Materials im Punkt (x,y,z)

$$\text{Masse von } B = \iiint\limits_B \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Wie bei Doppelintegralen gilt dann

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[g,h]} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_g^h f(x,y,z)\,dz\right)\,dy\right)\,dx$$

Definition 1.3.1. (Normalbereich in $\mathbb{R}^3$:) Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ und

$$B = \{(x,y)|a<x<b, f(x)<y<g(x)\}$$

der durch diese beiden Funktionen bestimmte Normalbereich. Seien weiters $\varphi,\psi : B\to R$. Dann beschreibt

$$V = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|a<x<b, f(x)<y<g(x), \varphi(x,y)<z<\psi(x,y)\big\}$$

einen dreidimensionalen Normalbereich.

Bemerkung 4. Sei V der eben beschriebene Normalbereich. Dann gilt

$$\iiint\limits_V h(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} h(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx.$$

Beispiel 5. Der Bereich V sei gegeben durch

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 < x < 1, \quad 0 < y < x, \quad 0 < z < xy \right\}.$$

Wir bestimmen

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=x} \left(\int_{z=0}^{z=xy} xyz\,dz \right) dy \right) dx = \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=x} \left(xy\frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{z=xy} dy \right) dx = \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{x^3}{2}\frac{y^4}{4} \Big|_{y=0}^{y=x} \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} \frac{x^7}{8} = \frac{x^8}{64}\Big|_0^1 = \frac{1}{64}.
\end{aligned}$$

Beispiel 6. Gegeben sei ein Bereich $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | |x| + |y| + |z| \leq 1\}$. Gesucht ist sein Volumen.

$$\begin{aligned}
W &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x,y,z > 0, x+y+z \leq 1 \right\} = \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y \right\} \\
V &= \iiint\limits_B 1\ dx\,dy\,dz = \\
&= 8 \iiint\limits_W dx\,dy\,dz = 8 \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=1-x} \left(\int_{z=0}^{z=1-x-y} dz \right) dy \right) dx \\
&= 8 \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=1-x} (1-x-y) = \ dy \right) dx \\
&= 8 \int_{x=0}^{x=1} \left((y - xy - \frac{y^2}{2}) \Big|_{y=0}^{y=1-x} \right) dx \\
&= 8 \int_{x=0}^{x=1} \left(1 - x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx \\
&= 8 \int_{x=0}^{x=1} \frac{(1-x)^2}{2}\,dx = -8\frac{1}{6}(1-x)^3 \Big|_{x=0}^{x=1} = 8\frac{1}{6} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Beispiel 7.

$$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|\leq 1} xyz\,dx\,dy\,dz = 0$$

Der Integrationsbereich ist symmetrisch und der Integrand ungerade (d.h. $f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z)$), daher muss man das Integral nicht ausrechnen. Man kann „durch Hinschauen“ erkennen, dass das Integral verschwindet.

1.4 Transformationregel für Dreifachintegrale

Satz 1.3. *(Transformationsregel für Dreifachintegrale:) Sei $T : B \to \mathbb{R}^3$ eine einmal stetig differenzierbare, injektive Abbildung gegeben durch*

$$(u,v,w) \mapsto (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)).$$

Dann gilt

$$\iiint\limits_{T(B)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{B} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right)\right| du\,dv\,dw.$$

Beispiel 8.

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} \left(x^2+y^2\right) z^2\,dx\,dy\,dz = ?$$

Substitution mit räumlichen Polarkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

mit $0 \le r$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ (oder $-\pi \le \varphi \le \pi$). Für die Jacobi-Determinante erhalten wir

$$\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right) = \det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} (x^2+y^2)z^2\,dx\,dy\,dz = \\
&= \int_{r=0}^{r=1}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)r^2\cos^2\theta(r^2\sin\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi = \\
&= \int_{r=0}^{r=1}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^6\sin^3\theta\cos^2\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = \\
&= \int_{r=0}^{r=1} r^6\,dr\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta = \\
&= \frac{1}{7}2\pi\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin\theta(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta\,d\theta \\
&u=\cos\theta,\ du=-\sin\theta\,d\theta \\
&= \frac{2\pi}{7}\int_1^{-1}(1-u^2)u^2(-\,du) \\
&= \frac{2\pi}{7}\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8\pi}{105}
\end{aligned}$$

Beispiel 9. Bestimme das Volumen des Körpers, der von der durch $(x^2+y^2+z^2)^2 = x$ beschriebenen Fläche begrenzt wird.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$r^4 = r\cos\theta \Rightarrow r^3 = \cos\theta, r\ge 0 \Rightarrow \cos\theta \ge 0 : 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ Damit erhalten

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le r\le\sqrt[3]{\cos\theta}$$

$$\begin{aligned}
\text{Volumen } V &= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{r=0}^{r=\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = \\
&= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r=\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta = \\
&= 2\pi\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\frac{r^3}{3}\sin\theta\Bigg|_{r=0}^{r=\sqrt[3]{\cos\theta}} d\theta = \frac{2\pi}{3}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \\
&u=\cos\theta,\ du=-\sin\theta\,d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_1^0 u(-\,du) = \frac{2\pi}{3}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Beispiel 10. Bestimme das Volumen des durch $(x^2+y^2+z^2)^2 = \frac{64}{x^2+y^2}$ begrenzten Bereiches. Wir führen Zylinderkoordinaten ein:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\begin{aligned} (x^2+y^2+z^2)^2 &= \frac{64}{x^2+y^2} \\ &\Rightarrow (r^2+z^2)^2 = \frac{64}{r^2} \\ &\Rightarrow r^2+z^2 = \frac{8}{r} \\ &\Rightarrow z^2 = \frac{8-r^3}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8-r^3 \geq 0 \Rightarrow r \leq 2; z^2 \leq \frac{8-r^3}{r} \\ \Rightarrow -\sqrt{\frac{8-r^3}{r}} \leq z \leq \sqrt{\frac{8-r^3}{r}}; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad 0 \leq r \leq 2 \end{aligned}$$

Das Volumen von V ist dann

$$\begin{aligned} &\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=2} \int\limits_{z=-\sqrt{\frac{8-r^3}{r}}}^{z=\sqrt{\frac{8-r^3}{r}}} r\,dz\,dr\,d\varphi = \\ =&\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \int_{r=0}^{r=2} \int\limits_{z=-\sqrt{\frac{8-r^3}{r}}}^{z=\sqrt{\frac{8-r^3}{r}}} r\,dz\,dr \\ =&2\pi \int_{r=0}^{r=2} 2\sqrt{\frac{8-r^3}{r}}\,r\,dr \\ =&\frac{4\pi}{3}\int_0^8 \sqrt{\frac{8-u}{u}}\,du = \frac{16\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt $r^3 = u$ substituiert. Das Integral läßt sich durch die Substitution

$$t = \sqrt{\frac{8-u}{u}}$$

berechnen.

Kapitel 2

Vektoranalysis

Definition 2.0.1. Eine Abbildung $\mathbf{V} : U \to \mathbb{R}^3 \,, U \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt *Vektorfeld*. Jedem Punkt von U wird ein Vektor zugeordnet.

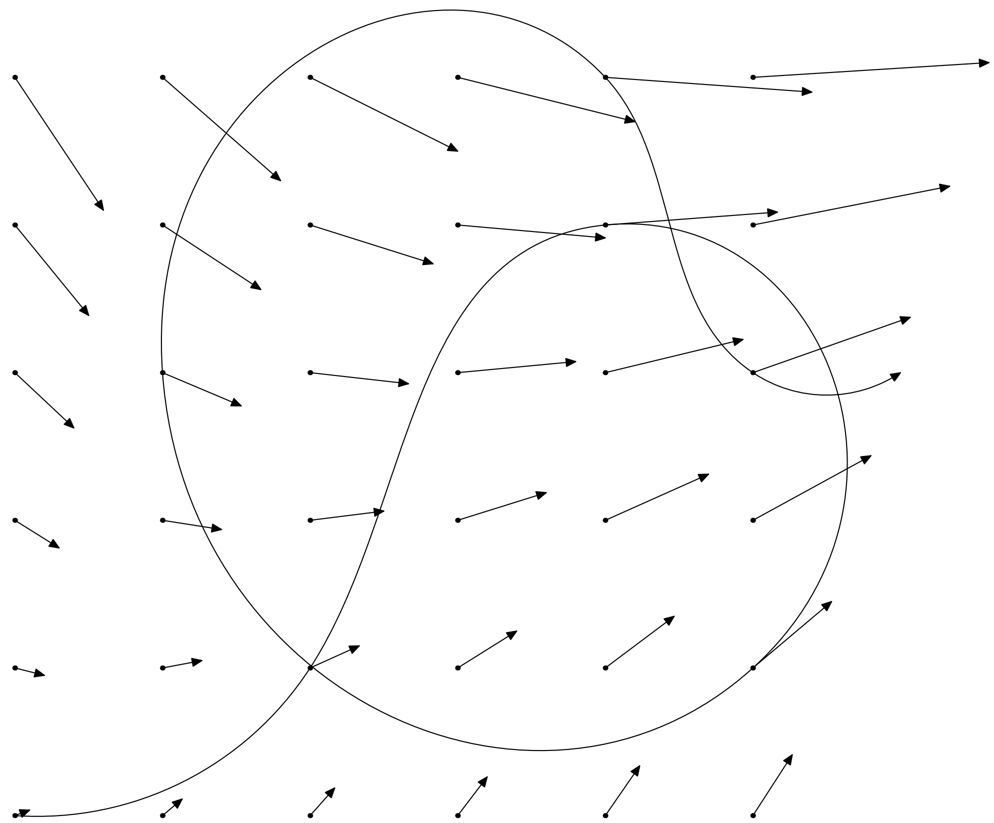

Abbildung 2.1: Vektorfeld

Beispiele: Strömung, Gravitation, elektrisches Feld.

2.1 Kurvenintegrale

Sei $\mathbf{x}(t)$ eine Kurve (Bewegung im Vektorfeld). Gesucht wird die Arbeit, die bei Bewegung entlang der Kurve im Feld verrichtet wird. Es gilt

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft(in Wegrichtung)} \times \text{Weg.}$$

$$\mathbf{x}(t_0 + h) - \mathbf{x}(t_0) \approx \dot{\mathbf{x}}(t_0)h$$

Die Arbeit entlang der Kurve zwischen $\mathbf{x}(t_0)$ und $\mathbf{x}(t_0 + h)$ ist daher etwa

$$\|\mathbf{V}(\mathbf{x}(t_0))\| \cdot \|h\dot{\mathbf{x}}(t_0)\| \cos(\alpha) = \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_0)), h\dot{\mathbf{x}}(t_0)\rangle = h\langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_0)), \dot{\mathbf{x}}(t_0)\rangle$$

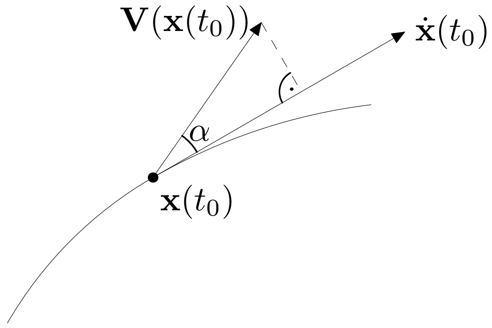

Abbildung 2.2: Arbeit entlang einer Kurve im Vektorfeld $\mathbf{V}$

Damit erhalten wir für die Arbeit entlang der Kurve $\mathbf{x} : [a, b] \to U$:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t)\rangle dt \\
&\quad = \int_a^b [V_1(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t) + V_2(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t) + V_3(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t)]\, dt \\
&\qquad =: \int_C V_1\, dx + V_2\, dy + V_3\, dz = \int_C \mathbf{V}\, d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Wichtig: Die Kurve ist nicht nur die Trägermenge C sondern hat auch eine Orientierung.

Die letzte Definition legt nahe, dass das Kurvenintegral nur vom Vektorfeld und der orientierten Kurve, aber nicht von der Parametrisierung der Kurve abhängt:

$$\int_C \mathbf{V}\, d\mathbf{x} := \int_a^b \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t)\rangle\, dt$$

Wir wollen die Kurve mit einer anderen Parametrisierung versehen, also

$$\varphi : [c,d] \to [a,b],\ t = \varphi(u),\ \ dt = \dot{\varphi}(u)\,du,$$
$$\varphi(c) = a\ ,\varphi(d) = b.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{V}\,d\mathbf{x} &:= \int_c^d \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(\varphi(u))), \dot{\mathbf{x}}(\varphi(u))\rangle \dot{\varphi}(u)\,du \\ &= \int_c^d \langle \mathbf{V}(\mathbf{y}(u)), \dot{\mathbf{y}}(u)\rangle\,du\end{aligned}$$

mit $\mathbf{y}(u) = \mathbf{x}(\varphi(u))$. Der Vektor $\mathbf{y}$ durchläuft die selbe Menge wie $\mathbf{x}$ mit der selben Orientierung und es gilt

$$\int_c^d \langle \mathbf{V}(\mathbf{y}(u)), \dot{\mathbf{y}}(u)\rangle\,du = \int_a^b \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t)\rangle\,dt.$$

Bemerkung 5. Das Kurvenintegral hängt vom Vektorfeld $\mathbf{V}$, von der Kurve C und ihrer Orientierung, aber **nicht** von der Parametrisierung der Kurve ab.

Beispiel 11. Sei C die Verbindungsstrecke von $(0,0,0)$ nach $(1,2,3)$

$$\int_C xy\,dx + z\,dy + y\exp(z)\,dz =$$

$$\text{Parametrisierung: } \mathbf{x}(t) = t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\2t\\3t\end{pmatrix},\ t \in [0,1]$$

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} dt$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_C xy\,dx + z\,dy + ye^z\,dz &= \int_0^1 (t\,2t\,dt + 3t\,2\,dt + 2t\,e^{3t}\,3\,dt) \\ &= \int_0^1 (2t^2 + 6t + 6te^{3t})\,dt \\ &= \frac{2}{3}t^3\Big|_0^1 + 3t^2\Big|_0^1 + 2t\,e^{3t}\Big|_0^1 - \int_0^1 2e^{3t}\,dt\end{aligned}$$

$$= \frac{11}{3} + 2e^3 - \frac{2}{3}e^{3t}\Big|_0^1 = \frac{13}{3} + \frac{4}{3}e^3$$

Bemerkung 6. Der entscheidende Teil bei der Berechnung von Kurvenintegralen ist die Auswahl einer passenden Parametrisierung.

2.2 Wegunabhängigkeit

Definition 2.2.1. Ein Kurvenintegral $\int\limits_C \mathbf{V}\, d\mathbf{x}$ heißt wegunabhängig, wenn sein Wert nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve C, aber nicht vom Verlauf der Kurve abhängt.

Bemerkung 7. Das Kurvenintegral $\int\limits_C \mathbf{V}\, d\mathbf{x}$ ist wegunabhängig genau dann, wenn $\oint\limits_G \mathbf{V}\, d\mathbf{x}$ über jede geschlossene Kurve G verschwindet (siehe Abbildung 2.3).

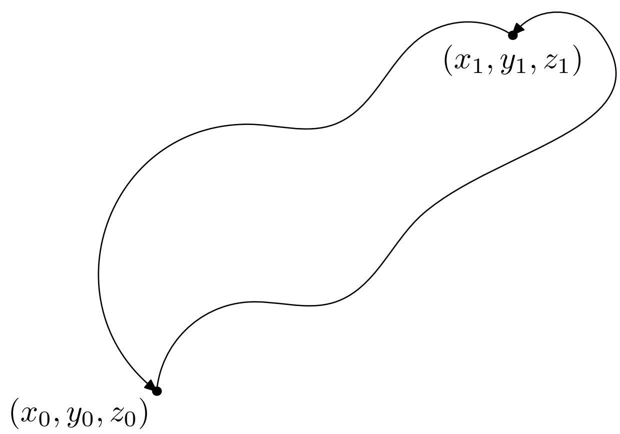

Abbildung 2.3: Wegunabhängigkeit

Wir nehmen an, dass $V = (V_1(x,y,z), V_2(x,y,z), V_3(x,y,z))$ ein Vektorfeld mit wegunabhängigen Kurvenintegralen sei.
Wir wählen (x_0, y_0, z_0) einen festen Anfangspunkt und setzten

$$\phi(x,y,z) = \int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \mathbf{V}\, d\mathbf{x} = \int\limits_{x_0}^{x} V_1(t_1, y_0, z_0)\, dt_1 + \int\limits_{y_0}^{y} V_2(x, t_2, z_0)\, dt_2 + \int\limits_{z_0}^{z} V_3(x, y, t_3)\, dt_3$$

Diese Schreibweise ist durch die Wegunabhängigkeit gerechtfertigt.

Differentiation nach x, y und z ergibt dann

$$\operatorname{grad} \phi = \mathbf{V},$$

das Vektorfeld $\mathbf{V}$ ist also ein *Gradientenfeld*.

Das Integral $\int \mathbf{V}\, d\mathbf{x}$ ist also genau dann wegunabhängig, wenn eine Funktion ϕ existiert, deren Gradient $\mathbf{V}$ ist. Ein solches ϕ heißt eine Stammfunktion bzw. Potenzial. Wenn man ϕ gefunden hat, kann man das Kurvenintegral durch:

$$\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \mathbf{V}\, dx = \phi(x,y,z) - \phi(x_0,y_0,z_0)$$

berechnen.

Wir suchen eine Bedingung dafür, dass $\mathbf{V}$ ein Gradientenfeld ist:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$$

Durch Differenzieren der Einträge von V erhalten wir die notwendigen Bedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial y} &= \frac{\partial V_2}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial z} &= \frac{\partial V_3}{\partial y} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x} &= \frac{\partial V_1}{\partial z} \end{aligned}$$

Die folgende Schreibweise erleichtert es, sich diese Formeln zu merken

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{V} =: \operatorname{rot} \mathbf{V} \qquad \textit{Rotation} \text{ von } \mathbf{V}$$

Wenn $\mathbf{V}$ ein Gradientenfeld ist, dann gilt: $\operatorname{rot} \mathbf{V} = \vec{0} = \nabla \times \mathbf{V}$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi) = \nabla \times (\nabla\phi) = (\nabla \times \nabla)\phi = \vec{0}$$

Später brauchen wir dann noch

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \\ \nabla_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{V} \quad \textit{Divergenz} \text{ von } \mathbf{V} \text{ „Quelldichte“}$$

Für div und rot gilt dann

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{V}) = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{V}) = 0$$

Weiters definieren wir für später

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi) = \nabla\cdot\nabla\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \triangle\phi \quad \textit{Laplace Operator}$$
$$\triangle = \nabla\cdot\nabla.$$

2.3 Oberflächenintegrale

Sei $B \in \mathbb{R}^3$ eine Fläche.

$$B = \left\{ \left(\begin{array}{c} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{array} \right) \middle| (u,v) \in U \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$\mathbf{V}$ ist ein Vektorfeld, das wir als Strömung interpretieren. Wir wollen den Fluss des Vektorfeldes $\mathbf{V}$ durch die orientierte Fläche B bestimmen.

Durch ein kleines Flächenstück fließt etwa

$$\langle \mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle \cdot \text{Fläche}.$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ den Normalvektor auf B im Punkt $\mathbf{x} \in B$.

Parametrisierung der Fläche B (siehe Abbildung 2.4):

$$\phi : U \to B,\ U \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$(u,v) \mapsto \left(\begin{array}{c} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{array} \right).$$

Damit haben wir

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\phi(u,v)).$$

Der Normalvektor $\mathbf{n}$ ist das Vektorprodukt von Tangentialvektoren:

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}}{\|\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}\|}.$$

Das unbestimmte Vorzeichen $\pm$ deutet an, dass der *richtig orientierte* Normalvektor zu wählen ist.

$$\langle \mathbf{V}, \mathbf{n} \rangle \cdot \ \text{Fläche} = \left\langle \mathbf{V}(\phi(u,v)), \pm \frac{\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}}{\|\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}\|} \right\rangle \left\| \frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v} \right\| du\, dv$$

Fluss durch B ist :

$$\pm \iint\limits_U \left\langle \mathbf{V}(\phi(u,v)), \frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v} \right\rangle du\, dv$$

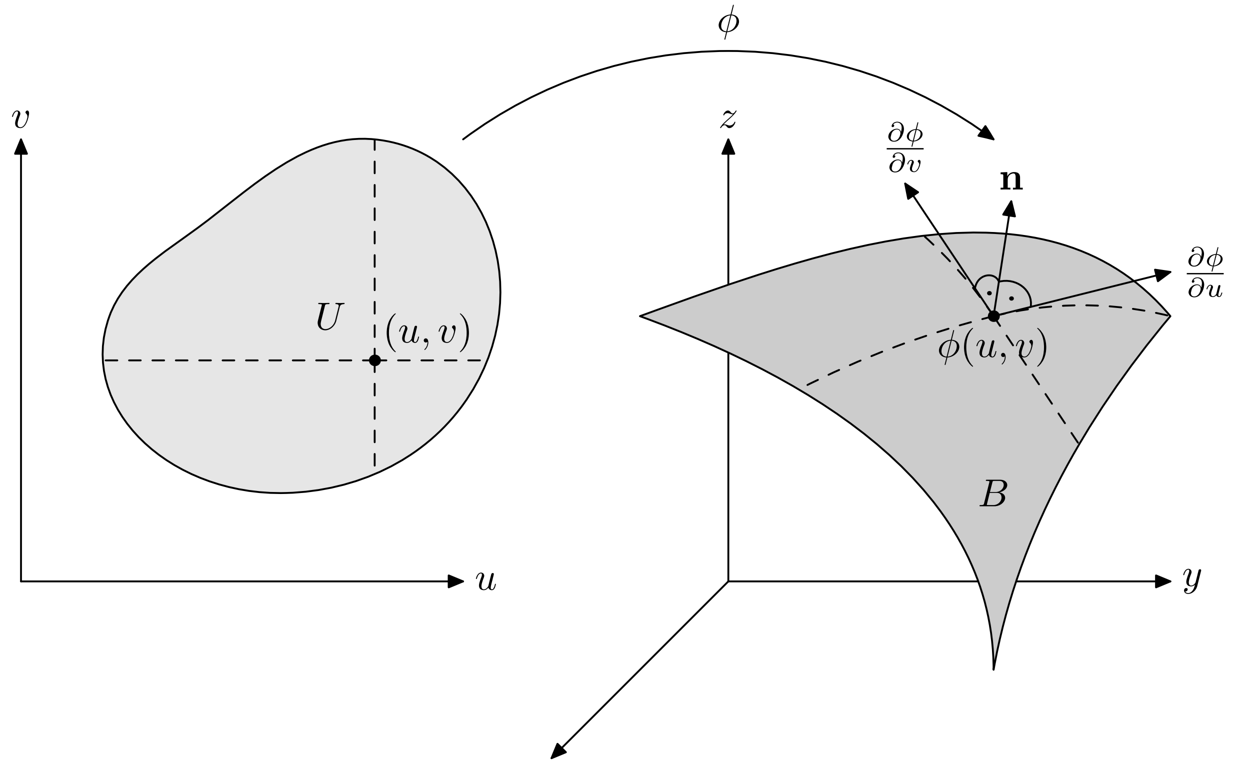

Abbildung 2.4: Parametrisierung einer Fläche im $\mathbb{R}^3$

Bemerkung 8. Der Wert des Integrals hängt nur vom Vektorfeld und der orientierten Fläche, aber nicht von der Parametrisierung ab.

Dies rechtfertigt die Schreibweisen

$$\iint_B \langle \mathbf{V}, \mathbf{n} \rangle \, do = \iint_B \mathbf{V} \cdot \, d\mathbf{o} = \iint_B V_1 \, dy \wedge \, dz + V_2 \, dz \wedge \, dx + V_3 \, dx \wedge \, dy,$$

wobei

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

Dabei nennt man $do = \| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \| du \, dv$ das skalare Oberflächenelement. $d\mathbf{o} = \mathbf{n} \cdot \, do$ heißt das vektorielle Oberflächenelement.

Beispiel 12. Sei

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \big| x^2 + y^2 + z^2 = 1, \, z \geq 0\}$$

so orientiert, dass der Normalvektor positive z-Koordinaten hat. Wir wollen dann

$$\iint_B x \, dy \wedge \, dz + y \, dz \wedge \, dx + z \, dx \wedge \, dy = ?$$

berechnen.

Wir benötigen dazu eine Parametrisierung für B:

$$\phi(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix};\ 0 \le u \le 2\pi;\ 0 \le v \le \frac{\pi}{2} \quad \text{nur Halbkugel } z \ge 0$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{o} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}\, du\, dv &= \pm \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ -\sin v \end{pmatrix} du\, dv \\ &= \pm \begin{pmatrix} -\cos u \sin^2 v \\ -\sin u \sin^2 v \\ -\sin v \cos v \end{pmatrix} du\, dv \end{aligned}$$

Wir wählen dieses Vorzeichen um die richtige Orientierung zu erhalten:

$$d\mathbf{o} = \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \sin v\, du\, dv$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \iint_B \mathbf{V}\, d\mathbf{o} &= \int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \sin v\, du\, dv \\ &= \int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin v\, du\, dv = \int_0^{2\pi} du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v\, dv = 2\pi(-\cos v)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Bemerkung 9. Die Schreibweise mit $\wedge$ deutet an, dass die Orientierung der Fläche wichtig ist:

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx; \quad \text{und } dx \wedge dx = -dx \wedge dx \Rightarrow dx \wedge dx = 0$$

Diese Rechenregeln stellen sicher, dass immer die richtigen Vorzeichen gewählt werden, sofern der der Orientierung entsprechend gerichtete Normalvektor gewählt wurde.

Beispiel 13. Wir bestimmen $dy \wedge\ dz$ nach den Rechenregeln

$$
\begin{aligned}
\phi(u,v) &= \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix};\ dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv; \\
dy &= \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv;\ dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv; \\
dy \wedge\ dz &= \left(\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\right) \wedge \left(\frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv\right) \\
&= \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}\,du \wedge\ du + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\,du \wedge\ dv + \\
&+ \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\,dv \wedge\ du + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}\,dv \wedge\ dv \\
&= \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\,du \wedge\ dv.
\end{aligned}
$$

Indem wir die Ergebnisse in das Integral $\iint v_1\,dy \wedge\ dz + v_2\,dz \wedge\ dx + v_3\,dx \wedge\ dy$ einsetzen, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_B v_1\,dy \wedge\ dz + v_2\,dz \wedge\ dx + v_3\,dx \wedge\ dy \\
&\quad = \iint\limits_V \Bigg(v_1(\phi(u,v))\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right) + v_2(\phi(u,v))\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) \\
&\qquad\qquad + v_3(\phi(u,v))\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\Bigg)\,du \wedge\ dv.
\end{aligned}
$$

Wenn sichergestellt ist, dass die richtige Orientierung gewählt wurde (Normalvektor!), darf am Ende $du \wedge\ dv$ durch $du\ dv$ ersetzt werden. Damit sind wir bei einem gewöhnlichen Doppelintegral angelangt, das wir ausrechnen können.

2.4 Integralsätze

2.4.1 Integralsatz von Gauß in der Ebene

Kurvenintegrale in der Ebene: $\mathbf{V} : U \to \mathbb{R}^2$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy := \int\limits_a^b \left(P(x(t),y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t),y(t))\dot{y}(t)\right)\,dt$$

Sei $B \subseteq U$ ein Normalbereich bezüglich beider Achsen (siehe Abbildung 2.5)

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun das Kurvenintegral über den Rand von B

$$\oint_{\partial B} P\,dx + Q\,dy$$

berechnen.

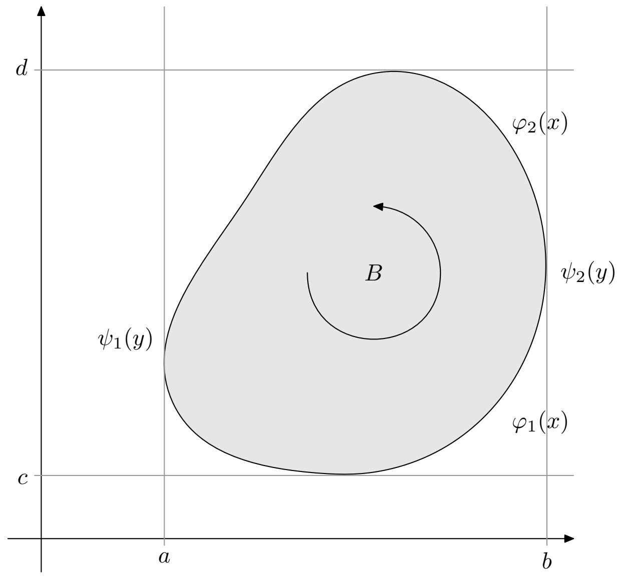

Abbildung 2.5: Der Bereich B

Wir schreiben das Kurvenintegral in ein Doppelintegral um

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B} P\,dx &= \int_a^b P(x,\varphi_1(x))\,dx + \int_b^a P(x,\ \varphi_2(x))\,dx \\ &= -\int_a^b \left(P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))\right)\,dx \\ &= -\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy \right)\,dx = -\iint_B \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \end{aligned}$$

$$\oint_{\partial B} Q\,dy = \int_d^c Q(\psi_1(y),y)\,dy + \int_c^d Q(\psi_2(y),y)\,dy$$
$$= \int_c^d \left(Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y)\right)\,dy$$
$$= \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$
$$= \iint_B \frac{\partial Q}{\partial x}\,dy\,dx$$

Satz 2.1 (Integralsatz von GAUSS in der Ebene)**.** *Sei B eine Teilmenge der Ebene, die von einer glatten Kurve ∂B berandet wird. Seien die beiden Funktionen P und Q auf ganz B differenzierbar. Dann gilt*

$$\oint_{\partial B} P\,dx + Q\,dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy.$$

Beispiel 14.

$$\oint_{\partial B} (-y)\,dx + x\,dy = \iint_B \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)\,dx\,dy$$
$$= 2\iint_B dx\,dy = 2\cdot \quad \text{Fläche von } B$$

Das ist die LEIBNIZsche Sektorformel

Folgerungen

Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen in der Ebene: $\int_c P\,dx + Q\,dy$ heißt wegunabhängig, wenn der Wert des Integrals nur von Anfang- und Endpunkt abhängt.
Wir wissen bereits, dass das Kurvenintegral wegunabhängig ist wenn

$$\oint_G P\,dx + Q\,dy = 0 \quad \text{für jede geschlossene Kurve G gilt.}$$

Ebenso ist die Wegunabhängigkeit äquivalent mit der Existenz einer Stammfunktion ϕ.
Für ϕ gilt dann: $\frac{\partial\phi}{\partial x} = P;\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = Q$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

d.h.: Wenn das Integral wegunabhängig ist, gilt:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Sei $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld auf U mit $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ dann,

$$\oint\limits_G P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0 \quad \text{wenn } G = \partial B$$

Bemerkung 10. Wenn U die Eigenschaft hat, dass jede geschlossene Kurve G in U ein Gebiet berandet, dann funktioniert obiges Argument und das Kurvenintegral $\int P\,dx + Q\,dy$ ist wegunabhängig. Wenn U keine „Löcher“ hat, dann ist jede geschlossene Kurve ein Rand. Gebiete U mit dieser Eigenschaft heißen *einfach zusammenhängend*.

Satz 2.2. *Sei U ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld auf U, dann ist das Kurvenintegral $\int P\,dx + Q\,dy$ genau dann wegunabhängig, wenn $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ gilt.*

Beispiel 15. Auf die Voraussetzung, dass U einfach zusammenhängend ist, kann nicht verzichtet werden.

$$\begin{aligned}
&\oint\limits_{x^2+y^2=1} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = ? \\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{x^2+y^2} + x\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right) = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{1}{x^2+y^2} - y\left(-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right) = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\oint\limits_{x^2+y^2=1} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int\limits_0^{2\pi} \frac{((\sin t)(\sin t) + \cos t\cos t)}{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

Das Vektorfeld $\mathbf{V}$ ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definiert und kann nicht in $(0,0)$ fortgesetzt werden.

Fluss eines Vektorfeldes durch eine Kurve (im $\mathbb{R}^2$)

$$\int \langle \mathbf{V}, \mathbf{n}\rangle\,ds;\ \mathbf{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix};\ \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix};\ \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt;\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t),\ t \in [a,b]$$

$$\int_a^b \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_a^b (-Q\dot{x} + P\dot{y})\, dt = \int_C -Q\, dx + P\, dy$$

Nach dem Integralsatz von Gauß gilt dann

$$\oint_{\partial B} -Q\, dx + P\, dy = \iint_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial(-Q)}{\partial y} \right) dx\, dy$$

Bemerkung 11. Der Fluss von $\mathbf{V}$ durch den Rand von B kann also als das Integral über eine "Quelldichte" geschrieben werden:

$$\oint_{\partial B} -Q\, dx + P\, dy = \iint_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx\, dy$$

2.4.2 Integralsätze für Kurven- und Oberflächenintegrale im Raum

Der Integralsatz von Stokes

Sei B ein Flächenstück im Raum und

$$\phi : (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung von B. Wir wollen nun

$$\oint_{\partial B} P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

als ein Kurvenintegral in (u, v) umschreiben und den Integralsatz von Gauß anwenden, um einen entsprechenden Integralsatz für Kurvenintegrale im Raum zu erhalten. Es gilt dann

$$\oint_{\partial B} P\, dx = \oint_C (P \circ \phi) \left(\frac{\partial x}{\partial u}\, du + \frac{\partial x}{\partial v}\, dv \right)$$

wegen

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\, du + \frac{\partial x}{\partial v}\, dv.$$

Nach dem Integralsatz von Gauß erhalten wir

$$\oint_C (P \circ \phi) \frac{\partial x}{\partial u}\, du + (P \circ \phi) \frac{\partial x}{\partial v}\, dv =$$

$$\iint_{\phi^{-1}(B)} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left((P \circ \phi) \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left((P \circ \phi) \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] du\, dv,$$

Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial}{\partial u}\left((P\circ\phi)\frac{\partial x}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}+P\circ\phi\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\left((P\circ\phi)\frac{\partial x}{\partial u}\right)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}+P\circ\phi\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}$$

Der Integrand des Doppelintegrals lässt sich dann als

$$\frac{\partial P}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)+\frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)+\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)$$

schreiben (der erste Summand ist 0). Insgesamt erhalten wir

$$\oint\limits_{\partial B} P\,dx=\iint\limits_{\phi^{-1}(B)}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right)du\,dv$$

und (unter Verwendung der $\wedge$-Schreibweise)

$$\oint\limits_{\partial B} P\,dx=\iint\limits_{B}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}dx\wedge\,dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz\wedge\,dx\right)$$
$$\oint\limits_{\partial B} Q\,dy=\iint\limits_{B}\left(-\frac{\partial Q}{\partial z}dy\wedge\,dz+\frac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge\,dy\right)$$
$$\oint\limits_{\partial B} R\,dz=\iint\limits_{B}\left(-\frac{\partial R}{\partial x}dz\wedge\,dx+\frac{\partial R}{\partial y}dy\wedge\,dz\right).$$

Durch Zusammenfassen ergibt sich

$$\oint\limits_{\partial B} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$
$$=\iint\limits_{B}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge\,dz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge\,dy+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge\,dx.$$

Wir erkennen, dass in diesem Oberflächenintegral genau die Koordinaten von $\operatorname{rot}\mathbf{V}$ vorkommen.

Satz 2.3 (Integralsatz von STOKES)**.** *Sei* $\mathbf{V}$ *ein Vektorfeld auf* $O\subseteq\mathbb{R}^3$*,* B *eine Fläche in* O *und* ∂B *ihr Rand. Dann gilt:*

$$\oint\limits_{\partial B}\mathbf{V}\,d\mathbf{s}=\iint\limits_{B}(\operatorname{rot}\mathbf{V})\,d\mathbf{o}$$

Dabei ist der Normalvektor auf B so zu wählen, dass bei Umlaufen der Kurve ∂B das Innere zur Linken liegt (Links ist durch den Normalvektor definiert), wie in Abbildung 2.5.

Bemerkung 12. $\int\mathbf{V}\,d\mathbf{s}$ ist wegunabhängig $\Leftrightarrow \oint\limits_{G}\mathbf{V}\,d\mathbf{s}=0$ für alle geschlossenen Kurven G $\Rightarrow$ $\operatorname{rot}\mathbf{V}=\vec{0}$. Wenn der Definitionsbereich von $\mathbf{V}$ so beschaffen ist, dass jede geschlossene Kurve eine Fläche berandet, dann gilt auch die Umkehrung.

Der Integralsatz von Gauß im Raum

Sei $\mathbf{V}$ ein Vektorfeld auf $O \subseteq \mathbb{R}^3$, $U \subseteq O$ - ein Volumen, ∂U Rand von U (eine geschlossene Fläche).

Analog zum Integralsatz von Gauß in der Ebene suchen wir eine Gleichung der Form

$$\oiint_{\partial U} \mathbf{V}\, d\mathbf{o} = \iiint_U \quad \text{Quelldichte } dx\, dy\, dz$$

Wir wollen die Quelldichte durch einen Grenzübergang bestimmen:

$$\begin{aligned}\text{Quelldichte}(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{\text{vol}(B((x_0, y_0, z_0), r)} \iiint_{B((x_0,y_0,z_0),r)} \quad \text{Quelldichte } dx\, dy\, dz \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{\frac{4\pi r^3}{3}} \oiint_{\partial B((x_0,y_0,z_0),r)} \mathbf{V}\, d\mathbf{o}\end{aligned}$$

$$\oiint_{\partial B((x_0,y_0 z_0),r)} P\, dy \wedge\ dz + Q\, dz \wedge\ dx + R\, dx \wedge\ dy$$

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi)\sin(\theta) + x_0 \\ y &= r\sin(\varphi)\sin(\theta) + y_0 \\ z &= r\cos(\theta) + z_0 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$d\mathbf{o} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ -r\sin(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} d\theta\ d\varphi = \begin{pmatrix} r^2\cos(\varphi)\sin(\theta)^2 \\ r^2\sin(\varphi)\sin(\theta)^2 \\ r^2\sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} d\theta\ d\varphi.$$

Die Koordinaten des Vektorfeldes ersetzen wir durch ihre erste Näherung

$$\begin{aligned}P(x,y,z) = P(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0 z_0)(x - x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) \\ + \frac{\partial P}{\partial z}(x_0, y_0 z_0)(z - z_0) + \text{ Rest}\end{aligned}$$

und setzen dies in das Integral ein

$$\begin{aligned}&\oiint_{\partial B} P\, dy \wedge\ dz \\ &= \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int\limits_{\theta=0}^{\theta=\pi} \Bigg(P(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) r\cos(\varphi)\sin(\theta) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ &\qquad + \frac{\partial P}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) r\cos(\theta) + \text{ Rest}\Bigg) \cdot r^2\cos(\varphi)\sin(\theta)^2\, d\theta\, d\varphi.\end{aligned}$$

Weil $\int_0^{2\pi} \cos(\varphi)\, d\varphi = 0$ und $\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)\cos(\varphi)\, d\varphi = 0$ verschwinden die Integrale über alle Terme bis auf den zweiten. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\oiint_{\partial B} P\, dy \wedge\, dz &= r^3 \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cos^2(\varphi) \sin^3(\theta)\, d\theta\, d\varphi + \text{ Rest} \\
&= r^3 \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi\, d\varphi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2(\theta)) \sin(\theta)\, d\theta + \text{ Rest} \\
&= \frac{4\pi r^3}{3} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \text{ Rest}
\end{aligned}$$

und daher

$$\lim_{r\to 0} \frac{3}{4\pi r^3} \oiint P\, dy \wedge\, dz = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0 z_0),$$

weil

$$\lim_{r\to 0} \frac{\text{Rest}}{r^3} = 0$$

gilt.

Dies gilt analog auch für $\iint_{\partial B} Q\, dz \wedge\, dx$ und $\iint_{\partial B} R\, dx \wedge\, dy$. Damit erhalten wir

$$\text{Quelldichte} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{V}.$$

Satz 2.4 (Integralsatz von Gauß im Raum)**.** *Sei U eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, die von der glatten Fläche ∂U berandet wird, und sei das Vektorfeld $\mathbf{V}$ auf ganz U differenzierbar. Dann gilt*

$$\oiint_{\partial U} \mathbf{V}\, d\mathbf{o} = \iiint_U \operatorname{div} \mathbf{V}\, dx\, dy\, dz.$$

Dabei ist ∂U so orientiert, dass der Normalvektor nach außen zeigt.

Bemerkung 13. Die Integralsätze von Gauß und Stokes motivieren folgende Definitionen:

- Ein Vektorfeld $\mathbf{V}$ heißt *wirbelfrei*, wenn die Rotation Null ist
- Ein Vektorfeld $\mathbf{V}$ heißt *quellenfrei* wenn die Divergenz Null ist

$$\Leftrightarrow \oiint_{\gamma} \mathbf{V}\, d\mathbf{o} = 0 \quad \text{für jede geschlossene Fläche } \gamma$$

Beispiel 16. Das folgende Beispiel zeigt, dass der Integralsatz von Gauß nur richtig ist, wenn der Definitionsbereich von $\mathbf{V}$ keine „Löcher“ hat, also jede geschlossene Fläche tatsächlich ein Gebiet berandet. Wir bestimmen das Oberflächenintegral des Vektorfeldes

$$\mathbf{V} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

über die Oberfläche der Kugel mit Radius R um den Ursprung. Dies ergibt mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\theta \\ R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\theta \end{pmatrix} \textbf{ und } d\mathbf{o} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\theta \\ R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\theta \end{pmatrix} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$\oiint\limits_{\partial B(\mathbf{0},R)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{o} = \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int\limits_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} R\sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = 4\pi \neq 0.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ = \frac{3(x^2+y^2+z^2)+3(-x^2-y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0, \end{aligned}$$

wodurch das Volumenintegral natürlich verschwindet (vergleiche mit Beispiel 15).

Index