Tutorium Mathematik I, M

21. Oktober 2016

***Aufgabe 1.** Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z, die Lösungen der Gleichung

$$z^4 + (-1 + \sqrt{3}i)z^2 - 2 - 2\sqrt{3}i = 0$$

sind.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen der folgenden (Un-)Gleichungen und zeichnen Sie die Lösungsmenge in der Gaußschen Zahlenebene:

(a) $|z - (1 - 4i)| = \mathrm{Re}(z)$;

(b) $z^8 + (5 - \sqrt{3}i)z^4 + 4 - 4\sqrt{3}i = 0$;

(c) $(1 - i)z^2 - (2 + 4i)z + 1 + 5i = 0$;

(d) $z\overline{z} - 4\overline{z} - 3i\overline{z} - 4z + 3iz < 24$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie das Produkt

$$\left(\frac{\sqrt{3} + i}{4}\right)^{12} (1 - i)^6 \left(-\sqrt{3} + 3i\right)^5$$

mit Hilfe von Polarkoordinaten und geben Sie das Ergebnis mit Real- und Imaginärteil an.

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben sind von den Studierenden zu bearbeiten.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Die Lösungsmenge ist die Menge aller z mit

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\left((\mathrm{Im}(z)+4)^2+1\right),$$

was einer um den Faktor $\frac{1}{2}$ gestauchten und nach rechts geöffneten Parabel mit Scheitelpunkt $\frac{1}{2}-4i$ entspricht.

(b) Die Lösungsmenge besteht aus den Punkten

$$z_{1,2} = 1 \pm i, \quad z_{3,4} = -1 \pm i, \quad z_{5,6} = \pm\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt[4]{8}}, \quad z_{7,8} = \pm\frac{-1+\sqrt{3}i}{\sqrt[4]{8}}.$$

(c) Die Lösungsmenge besteht aus den beiden Punkten

$$z_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad z_2 = -2+3i.$$

(d) Die Lösungsmenge ist die Menge aller z mit

$$(\mathrm{Re}(z)-4)^2 + (\mathrm{Im}(z)-3)^2 < 49,$$

was einer Kreisscheibe (ohne Rand) mit Mittelpunkt $4+3i$ und Radius 7 entspricht.

Lösung von Aufgabe 3

Das Ergebnis des Produktes ist

$$\frac{9\sqrt{3}}{16}\left(\cos\left(\frac{23\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right)\right) = \frac{27}{32} - \frac{9\sqrt{3}}{32}i.$$