Tutorium Mathematik I, M

3. Februar 2017

***Aufgabe 1.** Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\ln\left(e^x + 6\right) + \ln\left(e^x - 1\right) = x + \ln(4).$$

Aufgabe 2. Untersuchen Sie, ob die unten stehenden Folgen konvergent sind. Falls ja, bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(a) $a_n = \sqrt{7n-5} - \sqrt{5n+2}$

(b) $a_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{5n}$

Aufgabe 3. Berechnen Sie zur Funktion

$$f(x) = \frac{x - \arctan(x)}{\cosh(x) + \ln(1+x) - \cos(2x) - \sin(x)}$$

die Grenzwerte

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0} f(x) \qquad \text{und} \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Aufgabe 4. Lösen Sie das Integral

$$\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\mathrm{d}x.$$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben sind von den Studierenden zu bearbeiten.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Die Folge konvergiert nicht. Einfachster Weg hierfür ist, einen Faktor $\sqrt{n}$ auszuklammern, der Rest geht dann gegen $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ und somit die gesamte Folge gegen unendlich, weil $\sqrt{n}$ gegen unendlich geht. Alternativ kann man auch mit der Summe der beiden Wurzeln erweitern und im entstandenen Bruch einen Faktor n oder $\sqrt{n}$ kürzen.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-15}$. Dies sieht man am Einfachsten, wenn man die Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ verwendet.

Lösung von Aufgabe 3

Beide Grenzwerte sind Null. Für den Grenzwert in (a) benötigt man zweimal l'Hospital, für den Grenzwert in (b) nur einmal (die Rechnung dazu kann man natürlich von (a) übernehmen).

Lösung von Aufgabe 4

Dieses Integral kann man mit der Standardsubstitution $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, aber auch mit $u = \sin(x)$, $u = \cos(x)$ oder $u = \tan(x)$ lösen (Letzteres nach vorherigem Umschreiben des Nenners als $\frac{1}{2}\sin(2x)$). Je nach Lösungsweg kann man eine der folgenden äquivalenten Darstellungen erhalten (wobei $f(x)$ für den Integranden $\frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$ steht).

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \ln|\sin(x)| - \frac{1}{2}\ln|\sin(x)+1| - \frac{1}{2}\ln|\sin(x)-1| + C,$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \ln|\sin(x)| - \frac{1}{2}\ln\left|\sin(x)^2-1\right| + C,$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\cos(x)^2-1\right| - \ln|\cos(x)| + C,$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|\cos(x)+1| + \frac{1}{2}\ln|\cos(x)-1| - \ln|\cos(x)| + C,$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \ln|\tan(x)| + C,$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right| - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right| + C.$$

Zur Lösung der Aufgabe muss selbstverständlich nur *eine* der obigen Varianten bestimmt werden.