

Formelsammlung, Prüfung

Mathematik I, M, Vorlesung, Wintersemester 2016/17

Komplexe Zahlen

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

$$z = a + bi \Rightarrow \begin{cases} \bar{z} = a - bi \\ |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} \end{cases}$$

Polarkoordinaten:

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

$$\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

$$= r(\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)) = re^{-i\varphi}$$

$$r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \cdot s(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = rs(\cos(\varphi + \theta) + i \sin(\varphi + \theta))$$

Wurzeln: Die n -ten Wurzeln von $r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ sind

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) \right)$$

für $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Vektorrechnung

$$|\vec{x}| = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & \text{zweidimensional} \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} & \text{dreidimensional} \end{cases}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \begin{cases} x_1y_1 + x_2y_2 & \text{zweidimensional} \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 & \text{dreidimensional} \end{cases}$$

Winkel zwischen \vec{x}, \vec{y} : $\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$

Kreuzprodukt: $\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$

Geradengleichungen im \mathbb{R}^2 :

$$\vec{x} = P + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad \text{Parameterform}$$

$$\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{n}, P \rangle \quad \text{mit } \vec{n} = \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix} \quad \text{Normalform}$$

Ebenengleichungen im \mathbb{R}^3 :

$$\vec{x} = P + s\vec{q} + t\vec{r} \quad \text{Parameterform}$$

$$\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{n}, P \rangle \quad \text{mit } \vec{n} = \vec{q} \times \vec{r} \quad \text{Normalform}$$

Abstand Q zu $\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{n}, P \rangle$ (Gerade in \mathbb{R}^2 /Ebene in \mathbb{R}^3):

$$\frac{|\langle \vec{n}, Q \rangle - \langle \vec{n}, P \rangle|}{|\vec{n}|}$$

Fläche des von \vec{x} und \vec{y} aufgespannten Parallelogramms:

$$|\vec{x} \times \vec{y}|$$

Volumen des von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aufgespannten Parallelepipeds:

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle|$$

Folgen

Geometrische Folge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ \text{divergent} & \text{sonst} \end{cases}$$

Harmonische Folge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Majorantenkriterium: Konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a und gilt $|b_n - a| \leq |a_n - a|$ für alle n ab einem Index N , dann konvergiert auch $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .

Einschließungskriterium: Konvergieren sowohl $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als auch $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a und gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ ab einem Index N

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

dann konvergiert auch $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .

Häufungspunkt: Ein Punkt a ist ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ falls es für alle $\epsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder mit $|a_n - a| < \epsilon$ gibt.

Limes Superior und Limes Inferior: Der Limes Superior $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ (bzw. Limes Inferior $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$) der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist der größte (bzw. kleinste) Häufungspunkt.

Lineare Rekursionen: Hat das Polynom

$$x^t - c_1x^{t-1} - c_2x^{t-2} - \dots - c_{t-1}x - c_t$$

lauter verschiedene Nullstellen β_1, \dots, β_t , dann hat die Lösung der linearen Rekursion

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_t a_{n-t} \quad \text{für } n > t$$

die Form

$$a_n = \alpha_1\beta_1^n + \alpha_2\beta_2^n + \dots + \alpha_t\beta_t^n,$$

wobei die Konstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ durch die Anfangswerte a_1, \dots, a_t bestimmt werden.

Reihen

konvergent	divergent
$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $ q < 1$	$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ für $ q \geq 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Notwendige Bedingung: Eine Reihe kann nur konvergieren, wenn die Folge ihrer Summanden eine Nullfolge ist.

Majorantenkriterium: Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent und gilt $|a_n| \leq b_n$ für alle n ab einem Index N , dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Minorantenkriterium: Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent und gilt $0 \leq b_n \leq a_n$ für alle n ab einem Index N , dann divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Wurzelkriterium: Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für ein $q < 1$ und alle n ab einem Index N , dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Insbesondere konvergiert sie, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n , so divergiert sie.

Quotientenkriterium: Ist $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$ für ein $q < 1$ und alle n ab einem Index N , dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Insbesondere konvergiert sie, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$. Ist $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ für alle n ab einem Index N , dann divergiert die Reihe.

Leibniz-Kriterium: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Funktionen

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^0 = 1, \quad e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln(1) = 0, \quad \ln(x^a) = a \ln(x)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

Ableitungsregeln

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Notwendige Bedingung für Extrema: An Extremstellen im Inneren des Definitionsbereichs ist die Ableitung 0.

Hinreichende Bedingung für Extrema: Gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$, dann ist x eine Maximalstelle von f . Ist $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, liegt eine Minimalstelle vor.

Monotonie: Sei f auf $[a, b]$ stetig. Gilt $f'(x) \geq 0$ auf (a, b) , dann ist f auf $[a, b]$ monoton steigend. Gilt stattdessen $f'(x) \leq 0$, dann ist f monoton fallend. Gilt sogar $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$, dann ist f streng monoton steigend/fallend.

Krümmung: Eine differenzierbare Funktion ist (streng) konvex, falls ihre Ableitung (streng) monoton steigt. Sie ist (streng) konkav, falls die Ableitung (streng) monoton fällt. Ein *Wendepunkt* ist ein Punkt, an dem die Krümmung von konvex zu konkav (oder umgekehrt) wechselt.

Senkrechte Asymptoten: Konvergiert $f(x)$ für $x \rightarrow x_0^-$ und für $x \rightarrow x_0^+$ gegen ∞ oder $-\infty$, dann hat f bei x_0 eine senkrechte Asymptote.

Schiefe Asymptoten: Konvergiert für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$ der Bruch $f(x)/x$ gegen $a \in \mathbb{R}$ und außerdem $f(x) - ax$ gegen $b \in \mathbb{R}$, dann ist $ax + b$ eine Asymptote von f .

Regel von l'Hospital

Konvergieren f und g für $x \rightarrow a$ beide gegen 0 oder beide gegen ∞ , dann gilt $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Taylorpolynome und Potenzreihen

Taylorpolynom vom Grad n um x_0 :

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Taylorreihe um x_0 :
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Konvergenzradius: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ konvergiert für alle x mit $|x - x_0| < R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Für $|x - x_0| = R$ muss man die Konvergenz separat überprüfen.

Integrationsregeln

Partielle Integration:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Substitution: Setzen wir $x = g(u)$, dann ist

$$\int f(x)dx = \int f(g(u))g'(u)du.$$

Substitution $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ bei trigonometrischen Funktionen:

$$dx = \frac{2}{1+u^2}du \quad \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Partialbruchzerlegung: Ein Partialbruch ist von der Form

$$\frac{c}{(x-\lambda)^i} \text{ mit } i \in \mathbb{N} \text{ oder der Form } \frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta},$$

wobei $x^2 + \alpha x + \beta$ keine reellen Nullstellen hat.

Ist $\frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion mit $\text{grad}(P) < \text{grad}(Q)$, dann besteht eine *Partialbruchzerlegung* darin, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ als Summe von Partialbrüchen zu schreiben.

Wichtige Ableitungen und Integrale

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\int g(x)dx$	$g(x)$	$\int g(x)dx$	$g(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan(x)^2$ $= \frac{1}{\cos(x)^2}$	$\cot(x)$	$-1 - \cot(x)^2$ $= \frac{-1}{\sin(x)^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\text{arccot}(x)$	$\frac{-1}{x^2+1}$
$\tanh(x)$	$1 - \tanh(x)^2$ $= \frac{1}{\cosh(x)^2}$	$\coth(x)$	$1 - \coth(x)^2$ $= \frac{-1}{\sinh(x)^2}$
$\text{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\text{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\text{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$ $(x < 1)$	$\text{arcoth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$ $(x > 1)$

Bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ für } a < c < b$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Ist F eine Stammfunktion von f und beide Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ definiert, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ist f in a oder b nicht definiert, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y \rightarrow a^+} \int_y^b f(x)dx \quad \text{beziehungsweise}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y \rightarrow b^-} \int_a^y f(x)dx.$$

Hat f eine Polstelle im Punkt $c \in (a, b)$, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y \rightarrow c^-} \int_a^y f(x)dx + \lim_{y \rightarrow c^+} \int_y^b f(x)dx.$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$