

Mathematik I WS 2016/17
6. Übungsblatt
6.12.2016

Bei den Aufgaben auf diesem Blatt dürfen Sie keine Differentialrechnung verwenden!

Aufgabe 6.1. Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n \qquad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n-2}$$

und zeigen Sie, dass die Reihe

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n^2}$$

konvergiert.

Aufgabe 6.2. Welche der folgenden Funktionen sind gerade, welche sind ungerade? (Nachweis!)

$$(a) f(x) = \cosh(x) \cdot \sinh(x)^2 \qquad (b) g(x) = \sin(x) - \cos(x) \qquad (c) h(x) = \frac{2x^3 e^{x^2}}{x^6 + 5}$$

Aufgabe 6.3. Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{3x^2 + 29x + 28}{x+5}$ den maximalen Definitionsbereich sowie die größtmöglichen Intervalle, auf denen sie monoton ist.

Aufgabe 6.4. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sqrt{\ln(4-x) - 1}$.

- (a) Bestimmen Sie die größtmögliche Menge D , für die $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ist.
- (b) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.
- (c) Für welchen Wertebereich W ist $f: D \rightarrow W$ surjektiv?

Aufgabe 6.5. Welche der folgenden Funktionen besitzen eine Umkehrfunktion? Geben Sie die Umkehrfunktion an, falls sie existiert.

$$\begin{array}{ll} f(x): (0, \infty) \rightarrow [0, \infty) & x \mapsto \frac{1}{e^x - 1} \\ g(x): [3, 5] \rightarrow [3, 9] & x \mapsto \sqrt{x^2 - 9} + x \\ h(x): \mathbb{R} \rightarrow [-5, \infty) & x \mapsto 3x^2 - 5 \end{array}$$

Aufgabe 6.6. Berechnen Sie – nur mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen – die Identitäten

- (a) $\sin(x - y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y)$,
- (b) $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$,
- (c) $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$,
- (d) $1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$.