Tutorium Mathematik II, M

26. Mai 2017

***Aufgabe 1.** Eine Kurve sei implizit durch die Gleichung

$$f(x,y) = \cos(x)^3 \sin(y) + \sin(x)^3 \cos(y) = 0$$

für $-\pi \leq x, y \leq \pi$ gegeben. Ermitteln Sie alle singulären Punkte und alle Punkte, an denen vertikale oder horizontale Tangenten vorliegen. Geben Sie für alle anderen Punkte die Geradengleichung der Tangente an und skizzieren Sie die Kurve.

Aufgabe 2. Ermitteln Sie für die folgenden impliziten Kurven alle singulären Punkte und alle Punkte, an denen vertikale oder horizontale Tangenten vorliegen. Geben Sie für alle anderen Punkte die Geradengleichung der Tangente an und skizzieren Sie bei (a) und (b) die Kurve.

(a) $\quad f(x,y) = x^2 y - x y^3 = 0$

(b) $\quad f(x,y) = \ln(x) + \dfrac{y}{x} - 2 = 0, \qquad x > 0$

(c) $\quad f(x,y) = (x^2 y - 2x)e^{xy} - e^{\sqrt{2}} = 0$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben sind von den Studierenden zu bearbeiten.

Lösung von Aufgabe 2
Bei (a) gibt es eine horizontale Tangente bei $(x, 0)$ für alle $x \neq 0$, und eine vertikale Tangente für $(0, y)$ für alle $y \neq 0$. Es gibt einen singulären Punkt bei $(0, 0)$. Die allgemeine Tangentengleichung an der Stelle $(x_0, \pm\sqrt{x_0})$ ist $y = \pm\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x \pm \frac{\sqrt{x_0}}{2}$. Die Kurve besteht aus den x- und y-Achsen zusammen mit der Parabel $x = y^2$.

Bei (b) gibt es eine horizontale Tangente bei am Punkt (e, e). Es gibt keine vertikalen Tangenten und keine singulären Punkte. Die Tangentengleichung am Punkt (x_0, y_0) ist $y = (1 - \ln(x_0))x + x_0$.
Die Kurve ist die Kurve der Funktion $y = x(2 - \ln(x))$. Sie ist bei $x = 0$ stetig fortsetzbar (mit Funktionswert 0). Die erweiterte Kurve hat bei $(0, 0)$ eine vertikale Tangente und ist konkav, ab $x = e$ monoton fallend und $\lim_{x\to\infty} y = -\infty$.

Bei (c) gibt es horizontale Tangenten an den Punkten $(\frac{-1}{2-\sqrt{2}}, 2 - 2\sqrt{2})$ und $(\frac{-e^{2\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2}}, \frac{2+2\sqrt{2}}{e^{2\sqrt{2}}})$ und eine vertikale Tangente bei $(-e^{\sqrt{2}-1}, -e^{1-\sqrt{2}})$. Die allgemeine Tangentengleichung an der Stelle (x_0, y_0) ist $y = y_0 - \frac{x_0^2y_0^2-2}{x_0^2(x_0y_0-1)}(x - x_0)$.