Tutorium Mathematik II, M

2. Juni 2017

***Aufgabe 1.** Ermitteln Sie alle lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = xy^2$$

auf den Bereichen

(a) $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$,

(b) $B_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 3\}$.

Aufgabe 2. Ermitteln Sie alle lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = 2x^2 - y^2$$

auf den Bereichen

(a) $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$,

(b) $B_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 \geq 1\}$,

(c) $B_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y + 2\}$.

Aufgabe 3. Ermitteln Sie alle lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^2 \sin(y)$$

auf den Bereichen

(a) $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq \sin(y) + 6\}$,

(b) $B_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq \sin(y) + 1\}$.

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben sind von den Studierenden zu bearbeiten.

Lösung von Aufgabe 2
Die Funktion f besitzt keinerlei innere Extremstellen (der einzige Kandidat $(0,0)$ ist ein Sattelpunkt).

(a) Auf B_1 besitzt f ein lokales (sogar globales) Minimum in $(0,2)$ und (ebenfalls globale) Maxima in $(\frac{\sqrt{8}}{3}, \frac{2}{3})$ und in $(-\frac{\sqrt{8}}{3}, \frac{2}{3})$. Der Punkt $(0,0)$ ist zwar innerhalb des Randes ein lokales Minimum, auf B_1 aber *keine* Extremstelle.

(b) Auf B_2 besitzt f keinerlei lokale Extrema. Es gibt zwar Extremstellen innerhalb des Randes (die Punkte aus dem vorherigen Teil), dies sind allerdings *keine* Extremstellen auf B_2.

(c) Auf B_3 besitzt f ein lokales Minimum in $(-2,-4)$.

Lösung von Aufgabe 3
Der Gradient von f verschwindet genau für $x = 0$. An allen Punkten $(0, k\pi)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ liegen Sattelpunkte vor, an allen anderen Punkten $(0, y)$ befinden sich Maxima, falls $(2k-1)\pi < y < 2k\pi$, und Minima, falls $2k\pi < y < (2k+1)\pi$.

(a) Auf B_1 besitzt f zusätzlich zu den oben genannten Maxima und Minima (welche sich allesamt im Inneren von B_1 befinden) außerdem Minima bei $(5, 2k\pi - \frac{\pi}{2})$ für $k \in \mathbb{Z}$ sowie Maxima bei $(7, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$.

(b) Auf B_2 besitzt f Maxima an allen Stellen $(0, 2k\pi - \frac{\pi}{2})$ für $k \in \mathbb{Z}$ (alle anderen oben genannten Extremstellen liegen außerhalb von B_2). Alle Punkte mit $x = \frac{2}{3}$ und $x = 2$, welche auf dem Rand von B_2 liegen, sind zwar Extremstellen innerhalb des Randes, aber *keine* Extremstellen auf B_2.