Tutorium Mathematik II, M

7. April 2017

***Aufgabe 1.** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -12 \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Systeme

(a) $$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \vec{x},$$

(b) $$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \vec{x},$$

(c) $$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \vec{x},$$

(d) $$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben sind von den Studierenden zu bearbeiten.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$ (doppelt). Zu λ_2 finden wir auch zwei linear unabhängige Eigenvektoren. Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 2$ (doppelt) und $\lambda_2 = 3$. Zu λ_1 existieren jedoch keine zwei linear unabhängige Eigenvektoren. Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{x}(t) = (c_1 + c_2 t) e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 6$. Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{6t} \begin{pmatrix} 16 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(d) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 5$ (doppelt). Zu λ_2 existieren jedoch keine zwei linear unabhängige Eigenvektoren. Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (c_2 + c_3 t) e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$