Tutorium Mathematik II, M

19. Mai 2017

Aufgabe 1. Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für welche

$$\begin{pmatrix} 1 & t-4 & t+1 \\ 2 & t-7 & 3t+1 \\ 2 & 3t-9 & 2t+8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 5t+7 \\ 9t+3 \end{pmatrix}$$

(a) keine Lösung, (b) genau eine Lösung, (c) unendlich viele Lösungen besitzt. Geben Sie im Fall (c) die Lösungsmenge an.

Aufgabe 2. Ermitteln Sie die komplette Beschreibung des Kegelschnitts, welcher durch die Gleichung

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 = -2$$

definiert wird.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 5y' + 6y = 16xe^{2x} + 150e^{-3x}\,.$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie diejenige Lösung des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -10 \\ -7 & -13 & -26 \\ 5 & 11 & 21 \end{pmatrix} \vec{x}(t),$$

welche die Anfangsbedingung

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Lösung von Aufgabe 1

Bei $t = 1$ besitzt das System keine Lösung, bei $t = 5$ unendlich viele Lösungen. In allen anderen Fällen existiert eine eindeutige Lösung. Für $t = 5$ ist die Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 13s \\ 2 + s \\ s \end{pmatrix}$$

mit $s \in \mathbb{R}$.

Lösung von Aufgabe 2

Bei diesem Kegelschnitt handelt es sich um eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$, gedreht um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (bzw. $45°$).

Lösung von Aufgabe 3

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - x(8x + 16)e^{2x} + 5e^{-3x}.$$

Lösung von Aufgabe 4

Die gesuchte Lösung lautet

$$\vec{x}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 2t - 6 \\ 4t - 9 \\ -3t + 7 \end{pmatrix}.$$