

Mathematik II SS 2017
11. Übungsblatt
29.6.2017

Aufgabe 11.1. Integrieren Sie die Funktionen

(a) $f(x, y) = \cos(1 + x^2)$ über das Dreieck mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$,

(b) $g(x, y) = \frac{\sinh(x) - \cosh(y^2)x}{\ln(2+y^2)}$ über die Einheitskreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$,

(c) $h(x, y) = x^3 \sin(y) + ye^{-x}$ über den Bereich $[-1, 1] \times [0, 2\pi]$.

Aufgabe 11.2. Integrieren Sie die Funktion

$$f(x, y) = 6xy$$

über den Bereich

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + 16y^2 \leq 144 \wedge 5y \leq 2x + 8 \wedge 2x \leq 8 - 3y\}.$$

Aufgabe 11.3. Ein Zylinder der Höhe H mit kreisförmiger Grundfläche mit Radius R wird auf seiner Grundfläche mit einer Halbkugel vom Radius R verklebt. Welchen Wert muss H (in Abhängigkeit von R) annehmen, damit der Schwerpunkt des entstandenen Körpers genau im Mittelpunkt der Klebefläche liegt? Die Dichte kann konstant als $\rho = 1$ angenommen werden.

Sie dürfen bekannte Formeln für die Masse des Zylinders und der Halbkugel ohne Beweis verwenden

Aufgabe 11.4. Gegeben ist die Kugelschale

$$K = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Welche Masse besitzt diese Kugelschale, wenn die Dichte durch

(a) $\rho(x, y, z) = (x - y)z$

(b) $\rho(x, y, z) = xy + z$

(c) $\rho(x, y, z) = \frac{105}{62}(x^2 + y^2 + z^2)$

gegeben ist?

Aufgabe 11.5. Bestimmen Sie durch Wegintegrale die Arbeit, welche ein Körper im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ im Kraftfeld

$$\vec{K}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \end{pmatrix}$$

verrichtet, wenn er sich entlang der folgenden Kurven bewegt.

(a) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\sin(t) \\ \sqrt{2} \cos(t) \end{pmatrix}, t_1 = 0, t_2 = T;$

(b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t_1 = 0, t_2 = T;$

(c) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t_1 = -T, t_2 = 0.$