Mathematik II SS 2017
7. Übungsblatt
18.5.2017

Aufgabe 7.1. Bestimmen Sie zur Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t} \\ \sqrt{1+t} \end{pmatrix}$$

für jeden Zeitpunkt t die Krümmung $\kappa(t)$ sowie den Mittelpunkt des Krümmungskreises. Stellen Sie die Kurve und ihre Evolute in einer Skizze dar.

Aufgabe 7.2. Die Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 6t^2 \\ 3t - 4t^3 \end{pmatrix}$$

bildet eine Schleife, das heißt, es gibt genau zwei Zeitpunkte $t_1 \neq t_2$ mit $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2)$. Ermitteln Sie die Werte t_1, t_2 und die Bogenlänge sowie den überstrichenen Flächeninhalt zwischen diesen Zeitpunkten.

Aufgabe 7.3. Eine Kurve sei in Polarkoordinaten durch $r(\varphi) = \frac{1}{1+\varphi}$ gegeben. Bestimmen Sie die Bogenlänge und den überstrichenen Flächeninhalt von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \Phi$. Was geschieht für $\Phi \to \infty$?

Aufgabe 7.4. Gegeben ist die Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}\sin(t)\cos(t) \\ \cos(t)^2 \\ -\frac{4}{5}\sin(t)\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Formen Sie die Kurve in ihre natürliche Parametrisierung um und berechnen Sie das begleitende Dreibein in Abhängigkeit von der Bogenlänge.

Aufgabe 7.5. Berechnen Sie das begleitende Dreibein der Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 8t \\ 2t^2 \\ \frac{1}{3}t^3 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Beim Normieren tut man sich leichter, wenn man zuerst gemeinsame Faktoren aus den Koordinaten heraus kürzt.

Aufgabe 7.6. Berechnen Sie Torsion und Krümmung der Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ 2e^t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Wann sind Torsion bzw. Krümmung maximal und wann minimal?