Version A

Diskrete Mathematik ICE

Klausur vom 3.7.2018

Musterlösung

1a) $m = 77 = 7 \cdot 11$

$\varphi(m) = 6 \cdot 10 = 60$

Es muss gelten, dass $ggT(s, \varphi(m)) = 1$

$3 \mid 15$ und $3 \mid 60$ also $s \neq 15$

$2 \mid 16$ und $2 \mid 60$ also $s \neq 16$

$2 \mid 18$ und $2 \mid 60$ also $s \neq 18$

Also $\boxed{s = 17}$

b) $22^2 = 484 \equiv 22 \mod 77$

$22^4 \equiv 22^2 \equiv 22 \mod 77$

$\vdots$

$22^k \equiv 22 \mod 77 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\boxed{22^{17} \equiv 22 \mod 77}$

$9^2 = 81 \equiv 4 \mod 77$

$9^4 \equiv 4^2 \equiv 16 \mod 77$

$9^8 \equiv 16^2 \equiv 256 \equiv 25 \mod 77$

$9^{16} \equiv 25^2 \equiv 625 \equiv 9 \mod 77$

$\boxed{9^{17} \equiv 9 \cdot 9 \equiv 4 \mod 77}$

$11^2 = 121 \equiv 44 \mod 77$

$11^4 \equiv 44^2 \equiv 4^2 \cdot 11^2$

$\equiv 16 \cdot 44$

$\equiv 704$

$\equiv 11 \mod 77$

$11^{16} \equiv (11^4)^4 \equiv 11^4 \equiv 11 \mod 77$

$\boxed{11^{17} \equiv 11 \cdot (11)^{16} \equiv 11 \cdot 11 \equiv 44 \mod 77}$

Version A

2 a)

A	B	C	$B \to C$	$\neg(B\to C) \wedge A$	$\neg A \vee (\neg(B\to C)\wedge A)$	
W	W	W	W	F	F	a
W	W	F	F	W	W	1
W	F	W	W	F	F	b
W	F	F	W	F	F	c
F	W	W	W	F	W	2
F	W	F	F	F	W	3
F	F	W	W	F	W	4
F	F	F	W	F	W	5

3-KNF: $\underset{a}{(\neg A \vee \neg B \vee \neg C)} \wedge \underset{b}{(\neg A \vee B \vee \neg C)} \wedge \underset{c}{(\neg A \vee B \vee C)}$

3-DNF: $\underset{1}{(A \wedge B \wedge \neg C)} \vee \underset{2}{(\neg A \wedge B \wedge C)} \vee \underset{3}{(\neg A \wedge B \wedge \neg C)} \vee \underset{4}{(\neg A \wedge \neg B \wedge C)} \vee \underset{5}{(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)}$

b) Aussage falsch, denn für $a = 1 \in \mathbb{N}$ gilt $\nexists b\ (b+1=a)$ $\quad (0 \notin \mathbb{N})$

also $\exists a\ \neg \exists b\ (b+1=a)$

$\Rightarrow \neg \forall a\ \exists b\ (b+1=a)$

c) Aussage richtig, denn mit $x=1$ gilt

$\forall y\ \exists z\ (y = 1\cdot z)$ $\quad$ (wähle $z=y$)

Also $\exists x\ \forall y\ \exists z\ (y = x\cdot z)$

Version A

3a) $$F(x) = \frac{5+4x^2}{1-3x+4x^3} = \frac{5+4x^2}{(1-2x)(1-x-2x^2)} = \frac{5+4x^2}{(1-2x)^2(1+x)}$$

$$= \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-2x} + \frac{C}{(1-2x)^2}$$

$$A(1-2x)^2 + B(1+x)(1-2x) + C(1+x) = 5+4x^2$$

$x = \frac{1}{2}$: $\quad C \cdot \frac{3}{2} = 5+1 = 6 \Rightarrow C = 4$

$x = -1$: $\quad A \cdot 3^2 = 5+4 = 9 \Rightarrow A = 1$

Koeffizientenvergleich $[x^0]$: $\quad A + B + C = 5$

$1 + B + 4 = 5$

$B = 0.$

$$F(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{4}{(1-2x)^2}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

$$\frac{1}{(1-2x)^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-2x}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot n \cdot (2x)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\,(2x)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(2x)^n$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n + 4(n+1)\cdot 2^n\right)x^n$$

Version A

3b) $a_0 = 7$

$a_1 = 1$

$a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2} \qquad n \geq 2$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n - 5\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n - 6\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

$$\left(A(x) - a_1 x - a_0\right) - 5x\left(A(x) - a_0\right) - 6x^2 A(x) = 0$$

$$A(x)\left(1 - 5x - 6x^2\right) - a_1 x - a_0 + 5x a_0 = 0$$

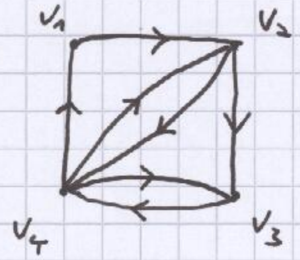
$$A(x) = \frac{a_1 x + a_0 - 5x a_0}{1 - 5x - 6x^2}$$

$a_1 = 1$
$a_0 = 7$

$$= \frac{7 - 34x}{1 - 5x - 6x^2}$$

Version A

4a)



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) G ist stark zusammenhängend: um den gerichteten Kreis $v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$ kommt man von jedem Knoten zu jedem anderen.

Da G stark zusammenhängend ist, ist G auch schwach zusammenhängend.

c) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 & \cdot \end{pmatrix}$$

→ Anzahl gerichteter Wege von v_4 nach v_3 ist 4.