Version B

Deskrete Mathematik I CE
Klausur vom 3.7.2018
Musterlösung

1a) $m = 77 = 7 \cdot 11$

$\varphi(m) = 6 \cdot 10 = 60$

Es muss gelten, dass $ggT(s, \varphi(m)) = 1$

$2 | 12$ und $2 | 60$ also $s \neq 12$

$2 | 14$ und $2 | 60$ also $s \neq 14$

$3 | 15$ und $3 | 60$ also $s \neq 15$

Also $\boxed{s = 13}$

b) $11^2 = 121 \equiv 44 \mod 77$

$11^4 \equiv 44^2 \equiv 4^2 \cdot 11^2$

$\equiv 16 \cdot 44$

$\equiv 704$

$\equiv 11 \mod 77$

$11^8 \equiv 11^2 \equiv 44 \mod 77$

$11^{13} \equiv 11 \cdot 11^4 \cdot 11^8$

$\equiv 11 \cdot 11 \cdot 44$

$\equiv 44^2$

$\boxed{11^{13} \equiv 11 \mod 77}$

$9^2 = 81 \equiv 4 \mod 77$

$9^4 \equiv 4^2 \equiv 16 \mod 77$

$9^8 \equiv 16^2 \equiv 256 \equiv 25 \mod 77$

$9^{13} \equiv 9 \cdot 9^4 \cdot 9^8 \equiv 9 \cdot 16 \cdot 25$

$\equiv 3600$

$\boxed{9^{13} \equiv 58 \mod 77}$

$22^2 = 484 \equiv 22 \mod 77$

$\vdots$

$22^k \equiv 22 \mod 77 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\boxed{22^{13} \equiv 22 \mod 77}$

Version B

2a)

A	B	C	$A \to B$	$\neg(A \to B) \land C$	$(\neg(A\to B) \land C) \lor \neg C$	
W	W	W	W	F	F	a
W	W	F	W	F	W	1
W	F	W	F	W	W	2
W	F	F	F	F	W	3
F	W	W	W	F	F	b
F	W	F	W	F	W	4
F	F	W	W	F	F	c
F	F	F	W	F	W	5

3-KNF : $\overset{a}{(\neg A \lor \neg B \lor \neg C)} \land \overset{b}{(A \lor \neg B \lor \neg C)} \land \overset{c}{(A \lor B \lor \neg C)}$

3-DNF : $\overset{1}{(A \land B \land \neg C)} \lor \overset{2}{(A \land \neg B \land C)} \lor \overset{3}{(A \land \neg B \land \neg C)} \lor \overset{4}{(\neg A \land B \land \neg C)} \lor \overset{5}{(\neg A \land \neg B \land \neg C)}$

b) Aussage falsch, denn für $x=1$ gilt $\nexists y\,(x=y+1)$ $\quad (0 \notin \mathbb{N})$

also $\exists x\ \neg \exists y\,(x=y+1)$

$\Rightarrow \neg \forall x\ \exists y\,(x=y+1)$

c) Aussage richtig, denn mit $a=1$ gilt

$\forall b\ \exists c\ (1 \cdot c = b)$ $\quad$ (wähle $c=b$)

also $\exists a\ \forall b\ \exists c\ (a \cdot c = b)$

Version B

3a) $$F(x) = \frac{5+4x^2}{1+3x-4x^3} = \frac{5+4x^2}{(1-x)(1+4x+4x^2)}$$

$$= \frac{5+4x^2}{(1-x)(1+2x)^2}$$

$$= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+2x} + \frac{C}{(1+2x)^2}$$

$$A(1+2x)^2 + B(1-x)(1+2x) + C(1-x) = 5+4x^2$$

$x = 1$: $\quad A \cdot 3^2 = 5+4 = 9 \Rightarrow A = 1$

$x = \frac{-1}{2}$: $\quad C \cdot \frac{3}{2} = 5+1 = 6 \Rightarrow C = 4$

Koeffizientenvergleich $[x^0]$:

$$A + B + C = 5$$

$$1 + B + 4 = 5$$

$$B = 0$$

$$F(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{4}{(1+2x)^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{(1+2x)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2x}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n\right)$$

$$= \frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)\cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + 4(n+1)(-2)^n\right)x^n$$

Version B

3b) $a_0 = 7$

$a_1 = -1$

$a_n = -5a_{n-1} + 6a_{n-2} \qquad n \geq 2$

$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n + 5\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n - 6\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

$$(A(x) - a_1 x - a_0) + 5x(A(x) - a_0) - 6x^2 A(x) = 0$$

$$A(x)(1 + 5x - 6x^2) - a_1 x - a_0 - 5x a_0 = 0$$

$$A(x) = \frac{a_1 x + a_0 + 5x a_0}{1 + 5x - 6x^2}$$

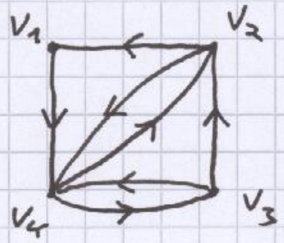
$a_0 = 7$

$a_1 = -1$

$$= \frac{34x + 7}{1 + 5x - 6x^2}$$

Version B

4a)



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) G ist stark zusammenhängend: um den gerichteten Kreis $v_4 v_3 v_2 v_1 v_4$ kommt man von jedem Knoten zu jedem anderen.

Da G stark zusammenhängend ist, ist G auch schwach zusammenhängend

c) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Anzahl gerichteter Wege von v_3 nach v_4 ist 4.