

Diskrete Mathematik ICE

1. Übungsblatt

13. März 2018

1. Zeigen Sie durch Induktion: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat die Summe der ersten n Zahlen den Wert

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zeigen Sie außerdem (per Induktion oder als Folgerung aus dem ersten Aufgabenteil): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat die Summe der ersten n ungeraden Zahlen den Wert

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

2. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$3^{4n} + 4^{3n-2}$$

durch 17 teilbar ist.

3. Finden Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus für die folgenden Zahlenpaare (m, n) den größten gemeinsamen Teiler d und Zahlen a und b mit $am + bn = d$.

(a) (144, 377)

(b) (2018, 306)

4. Bestimmen Sie alle Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$, für welche gilt

(a) $\text{ggT}(m, n) = 11$ und $\text{kgV}(m, n) = 2310$ bzw.

(b) $\text{ggT}(m, n) = 1$ und $\text{kgV}(m, n) = 40$.

Hinweis. Sie können verwenden, dass $\text{ggT}(m, n) \cdot \text{kgV}(m, n) = m \cdot n$.

5. Zu $m, n \in \mathbb{N}$ seien a ein gemeinsamer Teiler von m und n (also $a \mid m$ und $a \mid n$) und b ein gemeinsames Vielfaches von m und n (also $m \mid b$ und $n \mid b$). Zeigen Sie ohne Verwendung von Primfaktorzerlegungen, dass

$$a \mid \text{ggT}(m, n) \quad \text{und} \quad \text{kgV}(m, n) \mid b.$$

Hinweis. Für den zweiten Teil kann es helfen, $\text{ggT}(b, \text{kgV}(m, n))$ zu betrachten.