

Diskrete Mathematik ICE

7. Übungsblatt

15. Mai 2018

Verwenden Sie für die Aufgaben 31, 32 und 34 die logischen Regeln auf der zweiten Seite dieses Aufgabenblattes. Vermerken Sie bei jedem Umformungsschritt, welche Regel(n) Sie verwendet haben.

31. Zeigen Sie die folgenden aussagenlogischen Folgerungen $P_1, P_2 \Rightarrow P$.

- (a) $P_1 = X \wedge Y, P_2 = \neg Y; P = \neg X \vee \neg Y,$
- (b) $P_1 = \neg X \vee Y, P_2 = \neg Y \vee Z; P = \neg X \vee Z,$
- (c) $P_1 = Y; P = (X \rightarrow \neg Y) \rightarrow (Y \wedge \neg X).$

32. Seien X, Y, Z aussagenlogische Formeln. Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln äquivalent sind.

- (a) $(X \rightarrow \neg Y) \rightarrow (\neg Y \vee Z)$ und $(Y \rightarrow \neg X) \rightarrow (Y \rightarrow Z),$
- (b) $X \rightarrow (Y \rightarrow Z),$ $Y \rightarrow (X \rightarrow Z)$ und $(X \wedge Y) \rightarrow Z.$

33. Bestimmen Sie jeweils die n -KNF und die n -DNF der Formeln $A \leftrightarrow (B \rightarrow C)$ und $(A \leftrightarrow B) \rightarrow C$.

34. Bestimmen Sie möglichst kurze KNF und DNF der Formel

$$((A \rightarrow B) \wedge (C \leftrightarrow D)) \rightarrow (A \vee E).$$

35. Drücken Sie die folgenden Aussagen über natürliche Zahlen in Prädikatenlogik aus, wobei neben Quantoren, Junktoren und dem Gleichheitszeichen nur folgende Symbole erlaubt sind:

- Konstante 1;
- Funktionssymbole S (einstellig, $S(n) = n + 1$) sowie $+$ und \cdot (zweistellig, übliche Bedeutung);
- keinerlei Relationssymbole.

- (a) x ist gerade.
- (b) x ist eine Primzahl.
- (c) x ist kongruent zu y modulo z .
- (d) $\text{ggT}(x, y) = 1$.

Liste der erlaubten Regeln

- $$\begin{aligned} \neg\neg X &\iff X && (1) \\ X \wedge \top &\iff X && (2) \\ X \vee \perp &\iff X && (3) \\ X \wedge X &\iff X && (4) \\ X \vee X &\iff X && (5) \\ X \wedge Y &\implies X && (6) \\ X &\implies X \vee Y && (7) \\ (X \wedge Y) \wedge Z &\iff X \wedge (Y \wedge Z) && (8) \\ (X \vee Y) \vee Z &\iff X \vee (Y \vee Z) && (9) \\ X \wedge Y &\iff Y \wedge X && (10) \\ X \vee Y &\iff Y \vee X && (11) \\ X \wedge (Y \vee Z) &\iff (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) && (12) \\ X \vee (Y \wedge Z) &\iff (X \vee Y) \wedge (X \vee Z) && (13) \\ \neg(X \vee Y) &\iff \neg X \wedge \neg Y && (14) \\ \neg(X \wedge Y) &\iff \neg X \vee \neg Y && (15) \\ X \leftrightarrow Y &\iff (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X) && (16) \\ X \rightarrow Y &\iff \neg X \vee Y && (17) \\ X \rightarrow Y &\iff \neg Y \rightarrow \neg X && (18) \\ X \vee \neg X &\iff \top && (19) \\ X \wedge \neg X &\iff \perp && (20) \\ X \vee \top &\iff \top && (21) \\ X \wedge \perp &\iff \perp && (22) \\ (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) &\implies (X \rightarrow Z) && (23) \\ \perp &\implies X && (24) \\ X &\implies \top && (25) \end{aligned}$$