Diskrete Mathematik ICE

9. Übungsblatt

5. Juni 2018

41. Gegeben ist $a_n = (-2)^n + n5^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie geschlossene Ausdrücke für die Potenzreihen

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{und} \qquad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Letztere Potenzreihe bezeichnet man als *exponentielle erzeugende Funktion* der Folge (a_n).
Hinweis: Es gilt $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

42. Ermitteln Sie die erzeugende Funktion $H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$ der *harmonischen Zahlen*

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

43. In einer Urne sind 7 weiße, 7 rote und 7 schwarze Kugeln. Bestimmen Sie mittels erzeugender Funktionen

(a) die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von 6 Kugeln, wobei nur eine gerade Zahl an weißen, höchstens 2 schwarze und mindestens 2 rote Kugeln entnommen werden.

(b) die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von 9 Kugeln, wobei höchstens zwei weiße, eine gerade Zahl an schwarzen und eine durch 3 teilbare Anzahl an roten Kugeln entnommen werden.

(c) die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von 9 Kugeln, wobei genau eine schwarze Kugel mehr als weiße Kugeln genommen wird.

44. Zur Mitte des 20. Jahrhunderts gab es in Großbritannien folgende Münzen und Banknoten mit einem Wert von bis zu einem Pfund (aufsteigend nach Wert sortiert).

- Farthing (Viertelpenny);
- Penny, Threepence (drei Pennies) und Sixpence (sechs Pennies);
- Shilling (zwölf Pennies), Florin (zwei Shilling), Half Crown (zwei Shilling und ein Sixpence), Ten Bob (zehn Shilling);
- Sovereign (zwanzig Shilling bzw. ein Pfund).

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion, mit welcher die Anzahl verschiedener Möglichkeiten ermittelt werden kann, einen gewissen Geldbetrag zu bezahlen. Lesen Sie aus dieser Funktion die Anzahl an Möglichkeiten ab, Ware im Wert von vier Pennies zu bezahlen.

45. Bestimmen Sie einen expliziten Ausdruck für die Folgenglieder a_n der Folge

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = -1 \qquad \text{und} \qquad a_n + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 3^n \quad \text{für } n \geq 2.$$