Tutorium Mathematik I, M

19. Oktober 2018

***Aufgabe 1.** Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z, die Lösung der Gleichung

$$z^4 + (4 + \sqrt{3}i)z^2 + 3 + 3\sqrt{3}i = 0$$

sind.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen der folgenden (Un-)Gleichungen und zeichnen Sie die Lösungsmenge in der Gaußschen Zahlenebene:

(a) $|z - 3| = \mathrm{Im}(z)$;

(b) $z^2 - (4 - 6i)z - 5 - 4i = 0$;

(c) $z^4 + (1 - 3i)z^2 + 4 - 4i = 0$;

(d) $z\overline{z} - 7\overline{z} - 3i\overline{z} - 7z + 3iz < 42$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie das Produkt

$$\left(\frac{\sqrt{3} + 3i}{12}\right)^{15} (i - 1)^6 (3 - \sqrt{3}i)^{13}$$

mit Hilfe von Polarkoordinaten und geben Sie das Ergebnis mit Real- und Imaginärteil an.

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben sind von den Studierenden zu bearbeiten.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Die Lösungsmenge ist die Menge aller z mit

$$\mathrm{Re}(z) = 3 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) \geq 0$$

was einer senkrechten Halbgeraden mit Abstand 3 zum Ursprung entspricht.

(b) Die Lösungsmenge besteht aus den beiden Punkten

$$z_1 = -i \quad \text{und} \quad z_2 = 4 - 5i.$$

(c) Die Lösungsmenge besteht aus den Punkten

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{2}(1+i)$$

und

$$z_{3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{-1+\sqrt{2}} - i\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$$

(d) Die Lösungsmenge ist die Menge aller z mit

$$(\mathrm{Re}(z) - 7)^2 + (\mathrm{Im}(z) - 3)^2 < 100,$$

was einer Kreisscheibe (ohne Rand) mit Mittelpunkt $7 + 3i$ und Radius 10 entspricht.

Lösung von Aufgabe 3

Das Ergebnis des Produktes ist

$$\frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -\frac{1}{3} - \frac{i}{\sqrt{3}}$$