Tutorium Mathematik I, M

14. Dezember 2018

***Aufgabe 1.** Man bestimme für die folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich, alle lokalen und globalen Maxima und Minima sowie das Monotonieverhalten.

(a) $f(x) = e^{\sqrt{8+2x-x^2}}$

(b) $g(x) = \sqrt{(1-x^2)(3+4x+x^2)}$

Aufgabe 2. Man bestimme für die folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich, alle lokalen und globalen Maxima und Minima sowie das Monotonieverhalten.

(a) $f_1(x) = e^{\frac{1}{x^2-6x+8}}$ (b) $f_2(x) = \dfrac{2x^2+5x+15}{x^2-2x-3}$

(c) $f_3(x) = \dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$ (d) $f_4(x) = 2\ln(x)^2 - \sqrt{\ln(x)}$

(e) $f_5(x) = \sin(\pi\sqrt{x})$ (f) $f_6(x) = \cosh(x^2-2x-8)$

(g) $f_7(x) = \dfrac{e^x-1}{e^{2x}+1}$ (h) $f_8(x) = \operatorname{arsinh}(x^3-6x^2+12x)$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben sind von den Studierenden zu bearbeiten.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}\setminus\{2,4\}$. An der Stelle $x=3$ hat $f_1(x)$ ein lokales Maximum. $f_1(x)$ ist monoton wachsend in den Intervallen $(-\infty,2)$ und $(2,3]$ und monoton fallend in den Intervallen $[3,4)$ und $(4,\infty)$.

(b) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}\setminus\{-1,3\}$. An der Stelle $x=-5$ hat $f_2(x)$ ein lokales Minimum und an der Stelle $x=\frac{1}{3}$ hat $f_2(x)$ ein lokales Maximum. $f_2(x)$ ist monoton fallend in $(-\infty,-5]$, monoton wachsend in $[-5,-1)$ und $(-1,\frac{1}{3}]$ und wieder monoton fallend in $[\frac{1}{3},3)$ und $(3,\infty)$.

(c) Der Definitionsbereich ist $(1,\infty)$. $f_3(x)$ hat ein globales Maximum bei $x=e^e$ und ist monoton wachsend in $(1,e^e]$ und monoton fallend in $[e^e,\infty)$.

(d) Der Definitionsbereich ist $[1,\infty)$. $f_4(x)$ hat ein lokales Maximum am Rand $x=1$ und ein globales Minimum an $x=e^{1/4}$. Die Funktion ist monoton fallend in $[1,e^{1/4}]$ und monoton wachsend in $[e^{1/4},\infty)$.

(e) Der Definitionsbereich ist $[0,\infty)$. $f_5(x)$ hat ein lokales Minimum am Randpunkt $x=0$ und hat globale Maxima an allen Punkten $x=(\frac{1}{2}+2k)^2$, $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ und globale Minima an $x=(\frac{3}{2}+2k)^2$, $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Die Funktion ist monoton wachsend in $[0,\frac{1}{4}]$ und in allen Intervallen $[(\frac{3}{2}+2k)^2,(\frac{5}{2}+2k)^2]$, $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ und monoton fallend in allen Intervallen $[(\frac{1}{2}+2k)^2,(\frac{3}{2}+2k)^2]$, $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(f) $f_6(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat ein lokales Maximum an $x=1$ und globale Minima an $x=-2$ und $x=4$. f_6 ist monoton fallend auf $(-\infty,-2]$ und auf $[1,4]$ und ist monoton wachsend auf $[-2,1]$ und auf $[4,\infty)$.

(g) $f_7(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat ein globales Maximum an $x=\ln(1+\sqrt{2})$. f_7 ist monoton wachsend auf $(-\infty,\ln(1+\sqrt{2})]$ und monoton fallend auf $[\ln(1+\sqrt{2}),\infty)$.

(h) $f_8(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat keine Extremstellen (aber einen Sattelpunkt bei $x = 2$). Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ monoton wachsend.