Mathematik I WS 2018/19
3. Übungsblatt
6.11.2018

Aufgabe 3.1. Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$,

(b) $\left\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = \left\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle$.

Aufgabe 3.2. Betrachten Sie die Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R}.$$

Schneiden sich g und h? Falls ja, geben Sie den Schnittpunkt und Schnittwinkel an. Falls sie sich nicht schneiden, geben Sie ihren minimalen Abstand an, sowie die Punkte auf den Geraden, welche diesen Abstand zueinander haben.

Aufgabe 3.3. Gegeben seien der Punkt $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$, die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \; r \in \mathbb{R}$$

und die Ebene

$$\epsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie den Abstand von P zu g und von P zu ϵ. Berechnen Sie außerdem die Punkte auf g bzw. ϵ, die P am nächsten sind.

Aufgabe 3.4. Die Ebene

$$\epsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R}$$

ist in Parameterform gegeben. Bestimmen Sie die Ebenengleichung in Normalform. Bestimmen Sie außerdem den Schnittpunkt von ϵ mit der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \; r \in \mathbb{R}$$

sowie den Winkel, in welchem ϵ und g einander schneiden.

Aufgabe 3.5. Gegeben seien die Ebenen

$$\epsilon_1 : 12x + 3y + 4z = 6 \quad \text{und} \quad \epsilon_2 : 2x - y - 2z = 0.$$

Bestimmen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel der beiden Ebenen.

Aufgabe 3.6. Von einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ und Spitze S sind die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 26 \\ 20 \\ -42 \end{pmatrix}$$

bekannt. Ferner ist bekannt, dass die Grundfläche in der Ebene

$$\epsilon : 2x + y - 2z = 12$$

liegt. Bestimmen Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte der Pyramide.
(Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche heißt gerade, wenn alle vier Kanten von der Spitze zu den Ecken der Grundfläche gleich lang sind.)
Hinweis: Bestimmen Sie zuerst den Mittelpunkt der Grundfläche als Höhenfußpunkt der Pyramide.