

Mathematik I WS 2018/19

4. Übungsblatt

13.11.2018

Aufgabe 4.1. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

(a) $a_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 6}$;

(b) $b_n = \frac{2n^4 + 3n - 4}{5n^3 + 6n^2}$;

(c) $c_n = \frac{4^{n+3} + (-3)^{n+2}}{3^{n+1} + 2^{2n+1}}$;

(d) $d_n = \frac{4^{n+4} - 7^{n-3}}{6^{n-3} + 5^{n+42}}$.

Aufgabe 4.2.

(a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und sei $0 \leq a < 1$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 0$ gilt.

(b) Seien $b \in \mathbb{R}$ und $c > 1$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{c^n} = 0$ gilt.

Hinweis für (b): Sie dürfen den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

ohne Beweis verwenden.

Aufgabe 4.3. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

(a) $a_n = \sqrt{6n+2} - \sqrt{6n-4}$.

(b) $b_n = \sqrt{3n+4} - \sqrt{5n-6}$;

(c) $c_n = \frac{(n^6 - 4n^3)5^n + n^2 4^n}{6^{n-5}}$.

Aufgabe 4.4. Welche dieser Folgen sind monoton? Welche sind beschränkt?

(a) $a_n = (-1)^n \frac{n+3}{n+1}$;

(b) $b_n = \frac{3n^2 + n - 2}{n+2} - \frac{2n^2 + 3n + 1}{n+3}$.

Aufgabe 4.5. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie gegebenenfalls den Limes Superior und Limes Inferior der Folgen:

(a) $a_n = n + (-1)^{n-1}(n+2)$;

(b) $b_n = (-1)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)$;

(c) $c_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} - (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Aufgabe 4.6. Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ ist rekursiv durch

$$a_0 = 3, a_1 = 5, a_2 = 11 \quad \text{und} \quad a_n = 13a_{n-2} - 12a_{n-3} \quad \text{für } n \geq 3$$

definiert. Bestimmen Sie eine explizite Darstellung für a_n .