

Mathematik I WS 2018/19
6. Übungsblatt
27.11.2018

Bei den Aufgaben auf diesem Blatt dürfen Sie keine Differentialrechnung verwenden!

Aufgabe 6.1. Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \qquad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^n$$

und zeigen Sie, dass die Reihe

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$$

konvergiert.

Aufgabe 6.2. Welche der folgenden Funktionen sind gerade, welche sind ungerade? (Nachweis!)

$$(a) f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x) \qquad (b) g(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 - 1 + 2e^{x^2}} \qquad (c) h(x) = \frac{1 + 3 \sinh(x)^2}{2 \cosh(x) - 1}$$

Aufgabe 6.3. Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{2x^2+12x+15}{x+4}$ den maximalen Definitionsbereich sowie die größtmöglichen Intervalle, auf denen sie monoton ist.

Aufgabe 6.4. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{3 - \sqrt{x}}}$.

- (a) Bestimmen Sie die größtmögliche Menge D , für die $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ist.
- (b) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.
- (c) Für welchen Wertebereich W ist $f: D \rightarrow W$ surjektiv?

Aufgabe 6.5. Welche der folgenden Funktionen besitzen eine Umkehrfunktion? Geben Sie die Umkehrfunktion an, falls sie existiert. (Nachweis!)

$$(a) f(x): (1, \infty) \rightarrow [0, \infty) \qquad x \mapsto \frac{3}{2^x - 2}$$
$$(b) g(x): [5, 13] \rightarrow [5, 25] \qquad x \mapsto \sqrt{x^2 - 25} + x$$
$$(c) h(x): \mathbb{R} \rightarrow [-3, \infty) \qquad x \mapsto 5x^2 - 3$$

Aufgabe 6.6. Berechnen Sie – nur mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen – die Identitäten

- (a) $\sin(x - y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y)$,
- (b) $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$,
- (c) $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2 \cos(x)^2 - 1$,
- (d) $1 + \cot(x)^2 = \frac{1}{\sin(x)^2}$.