Tutorium Mathematatik II, M

17. Mai 2019

***Aufgabe 1.** Ermitteln Sie alle lokalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = 2x^2y$$

auf den Bereichen

(a) $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 12\}$;

(b) $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 12\}$.

Aufgabe 2. Ermitteln Sie alle lokalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = 4x^2 - 3y^2$$

auf den Bereichen

(a) $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$;

(b) $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \geq 1\}$;

(c) $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \geq 1\}$.

Aufgabe 3. Ermitteln Sie alle lokalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = y^2\cos(x)$$

auf den Bereichen

(a) $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq \cos(x) + 4\}$;

(b) $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \cos(x) + 1\}$;

Die mit * markierte Aufgabe wird vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben sind von den Studierenden zu bearbeiten.

Lösung von Aufgabe 2:

Die Funktion f besitzt keine inneren Extremstellen (der einzige Kandidat $(0,0)$ ist ein Sattelpunkt).

(a) auf B_1 besitzt f ein lokales (sogar globales) Maximum in $(-2,0)$ und (ebenfalls globale) Minima in $(-\frac{3}{7}, \frac{\sqrt{33}}{7})$ und in $(-\frac{3}{7}, -\frac{\sqrt{33}}{7})$. Der Punkt $(0,0)$ ist zwar innerhalb des Randes ein lokales Maximum, aber auf B_1 *keine* Extremstelle.

(b) Auf B_2 besitzt f keine lokalen Extrema. Es gibt zwar Extremstellen innerhalb des Randes (Die Punkte aus dem vorigen Teil), diese sind aber *keine* Extremstellen auf B_2.

(c) Auf B_3 besitzt f ein lokales Minimum in $(-3,-4)$.

Lösung von Aufgabe 2:

Der Gradient von f verschwindet genau für $y = 0$. An allen Punkten $((k+\frac{1}{2})\pi, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ liegen Sattelpunkte vor, an allen anderen Punkten $(x,0)$ befinden sich Maxima, falls $(2k-\frac{1}{2})\pi < x < (2k+\frac{1}{2})\pi$, und Minima, falls $(2k+\frac{1}{2})\pi < x < (2k+\frac{3}{2})\pi$.

(a) Auf B_1 besitzt f zusätzlich zu den oben genannten Maxima und Minima (welche innerhalb von B_1 liegen) außerdem Minima bei $((2k+1)\pi, 3)$ für $k \in \mathbb{Z}$ und Maxima bei $(2k\pi, 5)$.

(b) Auf B_2 besitzt f Minima an den Stellen $((2k+1)\pi, 0)$ für $k \in \mathbb{Z}$ (alle anderen oben genannten Extremstellen liegen außerhalb von B_2. Alle Punkte mit $y = \frac{2}{3}$ und $y = 2$, welche am Rand von B_2 liegen, sind zwar Extremstellen des Randes, aber *keine* Extremstellen auf B_2.