Tutorium Mathematik II, M

5. April 2019

***Aufgabe 1.** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -9 \\ -2 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungn der homogenen Systeme

(a)

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -6 & -21 & -7 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 15 & 6 \end{pmatrix} \vec{x}$$

(b)

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 13 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

(c)

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$$

(d)

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 4 & -19 & -24 \\ -4 & 17 & 22 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Die mit * markierte Aufgabe wird vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben sind von den Studierenden zu bearbeiten.

Lösung von Aufgabe 2

Achtung, die Darstellungen der Lösungen sind nicht eindeutig!

(a) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ (doppelt) und $\lambda_2 = 2$. Zu λ_1 finden wir auch zwei linear unabhängige Eigenvektoren. Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 0$ (doppelt) und $\lambda_2 = 9$. Zu λ_1 existieren jedoch keine zwei linear unabhängigen Eigenvektoren. Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{x}(t) = (c_1 + c_2 t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 e^{9t} \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -4$ und $\lambda_3 = 6$. Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 e^{6t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$ (doppelt). Zu λ_2 existieren jedoch keine zwei linear unabhängigen Eigenvektoren. Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{x}(t) = (c_1 + c_2 t) e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$