Tutorium Mathematik II, M

17. Mai 2019

***Aufgabe 1.** Eine Kurve sei implizit durch die Gleichung

$$f(x,y) = \sin(x)\cos(y)^3 - \cos(x)\sin(y)^3$$

für $-\pi \leq x, y \leq \pi$ gegeben. Ermitteln Sie alle singulären Punkte und alle Punkte, an denen vertikale und horizontale Tangenten vorliegen. Geben Sie für alle anderen Punkte die Geradengleichung der Tangente an und skizzieren Sie die Kurve.

Aufgabe 2. Ermitteln Sie für die folgenden implizit gegebenen Kurven alle singulären Punkte und alle Punkte, an denen vertikale und horizontale Tangenten vorliegen. Geben Sie für alle anderen Punkte die Geradengleichung der Tangente an und skizzieren Sie die Kurven a) und b).

(a) $xy^2 - x^3y = 0$

(b) $\dfrac{y}{x} - \ln(x) - 1 = 0, \qquad x > 0$

(c) $(2y - xy^2)e^{xy} - e^{\sqrt{2}} = 0$

Die mit * markierte Aufgabe wird vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben sind von den Studierenden zu bearbeiten.

Lösung von Aufgabe 2:

(a) Es gibt eine horizontale Tangente für alle Punkte $(x, 0)$ mit $x \neq 0$, eine senkrechte Tangente für alle Punkte $(0, y)$ mit $y \neq 0$ und einen singulären Punkt an $(0, 0)$. Die allgemeine Tangentengleichung an der Stelle (x_0, x_0^2) ist $y = 2x_0 x - x_0^2$. Die Kurve besteht aus den x und y-Achsen zusammen mit der Parabel $y = x^2$.

(b) Es gibt eine horizontale Tangente im Punkt $(e^{-2}, -e^{-2})$, keinen Punkt mit vertikaler Tangente und damit auch keinen singulären Punkt. Die Tangente im Punkt $(x_0, x_0(1 + \ln(x_0)))$ ist $y = -x_0 + (\ln(x_0) + 2)x$. Die Kurve ist der Graph der Funktion $y = x + x\ln(x)$.

(c) Es gibt eine horizontale Tangente im Punkt $(e^{1-\sqrt{2}}, e^{-1+\sqrt{2}})$ und eine vertikale Tangente im Punkt $(-2+\sqrt{8}, 1+2^{-1/2})$. Es gibt keinen singulären Punkt. Die Tangentengleichung im Punkt (x_0, y_0) is $y = y_0 - \frac{x_0 y_0^3 - y_0^2}{x_0^2 y_0^2 - 2}(x - x_0)$.