Mathematik II SS 2018/19
12. Übungsblatt
27.06.2019

Aufgabe 12.1. Integrieren Sie die Funktionen

(a) $f(x, y) = \sin(x^2 + 1)$ über das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$.

(b) $g(x, y) = \dfrac{x^3 \cos(y + 2) - \sinh(x)\sqrt{y + 2}}{\ln(y^2 + 1)}$ über die Einheitskreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$.

(c) $h(x, y) = \cos(\pi x) \sinh(y) + e^x y^2$ über den Bereich $[0, 2] \times [-1, 1]$.

Aufgabe 12.2. Bestimmen Sie für die Dichtefunktion

$$\rho(x, y) = 14xy$$

die Masse des Bereichs

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 25y^2 \leq 100 \wedge x + 3y \leq 6 \wedge x \leq 2 + y\}.$$

Aufgabe 12.3. Ein Zylinder der Höhe H mit kreisförmiger Grundfläche mit Radius R wird auf seiner Grundfläche mit einer Halbkugel von Radius R verklebt. Welchen Wert muss H (in Abhängigkeit von R) annehmen, damit der Schwerpunkt des entstehenden Körpers genau im Mittelpunkt der Klebfläche liegt? Die Dichte kann konstant $\rho = 1$ angenommen werden.
Sie dürfen bekannte Formeln für die Masse des Zylinders und der Halbkugel ohne Beweis verwenden.

Aufgabe 12.4. Gegeben ist der Torus

$$T = \{(x, y, z) \mid (x^2 + y^2 + z^2 + 8)^2 \leq 36(x^2 + y^2)\}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x(r, \phi, \theta) \\ y(r, \phi, \theta) \\ z(r, \phi, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3 + r\cos(\phi))\sin(\theta) \\ (3 + r\cos(\phi))\cos(\theta) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

mit Grenzen $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ und $0 \leq \theta \leq 2\pi$ die Masse (mit konstanter Dichte $\rho = 1$), den Schwerpunkt und das Trägheitsmoment I_z von T.

Aufgabe 12.5. Gegeben ist die Hohlkugel

$$K = \{(x, y, z) \mid 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}.$$

Welche Masse besitzt diese Hohlkugel, wenn die Dichte durch

(a) $\rho(x, y, z) = x(y - z)$

(b) $\rho(x, y, z) = x + yz$

(c) $\rho(x, y, z) = \frac{5}{422}(x^2 + y^2 + z^2)$

gegeben ist?

Aufgabe 12.6. Bestimmen Sie durch Wegintegrale die Arbeit, welche ein Körper im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ im Kraftfeld

$$\vec{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \end{pmatrix}$$

verrichtet, wenn er sich entlang der folgenden Kurven bewegt.

(a) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \sqrt{2}\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, $t_1 = 0$, $t_2 = T$;

(b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 2t \\ \cos(t) \end{pmatrix}$, $t_1 = 0$, $t_2 = T$;

(c) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 2t \\ \cos(t) \end{pmatrix}$, $t_1 = -T$, $t_2 = 0$;