Mathematik II SS 2018/19
3. Übungsblatt
28.03.2019

Aufgabe 3.1. Wir betrachten die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche Dimension hat der Untervektorraum $U = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle$ von $\mathbb{R}^4$, welcher von den vier Vektoren erzeugt wird?

(b) Bestimmen Sie eine Basis von U.

Aufgabe 3.2. Wenden Sie auf die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt an; einmal in der Reihenfolge $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, einmal in der Reihenfolge $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1$ und einmal in der Reihenfolge $\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1$

Aufgabe 3.3. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen annehmen, dass $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist. Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich der Basis B.

Aufgabe 3.4. Gegeben sind die Basen $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ und $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ des $\mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass B und C tatsächlich Basen sind.

(b) Berechnen Sie die Transformationsmatrix T von der Basis C auf die Basis B.

Aufgabe 3.5. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.6. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$