Mathematik II SS 2018/19
8. Übungsblatt
16.05.2019

Aufgabe 8.1. Bestimmen Sie zur Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + 2\cos(2t) \\ \sin(t) + 2\sin(2t) \end{pmatrix}$$

die Scheitelpunkte sowie die dazugehörigen Scheitelkrümmungen.

Aufgabe 8.2. Gegeben sei die Kurve $\vec{\gamma}$, welche der Graph der Funktion

$$f(x) = e^x$$

ist (also $\vec{\gamma} = (x, f(x))$). Bestimmen Sie für jedes x die Krümmung $\kappa(x)$ sowie den Mittelpunkt $(\xi(x), \eta(x))$ des Krümmungskreises. Weiters bestimmen Sie den Scheitelpunkt $(x_0, f(x_0))$ von $\vec{\gamma}$.
Zeigen Sie, dass für die Kurve $\vec{\varepsilon}(t) = (\xi(t), \eta(t))$ zum Zeitpunkt $t = x_0$ ein singulärer Punkt vorliegt.

Aufgabe 8.3. Die Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 8t - 6t^3 \\ 12t^2 \end{pmatrix}$$

bildet eine Schleife. Das heißt, es gibt genau zwei Zeitpunkte $t_1 \neq t_2$ mit $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2)$. Ermitteln Sie die Werte t_1, t_2 und die Bogenlänge sowie den überstrichenen Flächeninhalt zwischen diesen Zeitpunkten.

Aufgabe 8.4. Die Kurve $r(\varphi) = \frac{2}{3+\varphi}$ ist in Polarkoordinaten gegeben. Bestimmen Sie die Bogenlänge und den überstrichenen Flächeninhalt von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \Phi$ für $\Phi > 0$. Was geschieht für $\Phi \to \infty$?

Aufgabe 8.5. Berechnen Sie das begleitende Dreibein der Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 8t \\ -\frac{1}{3}t^3 \\ 2t^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8.6. Gegeben ist die Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}\cos(t)^2 \\ \sin(t)\cos(t) \\ \frac{4}{5}\sin(t)^2 \end{pmatrix}.$$

Formen Sie die Kurve in ihre natürliche Parametrisierung um und berechnen Sie das begleitende Dreibein in Abhängigkeit der Bogenlänge.