Formelsammlung zur ersten Übungsklausur

Mathematik II, M, Sommersemester 2019

Determinanten

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Entwicklung nach einer Zeile/Spalte: Für jedes j ist

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det(A_{jk}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{kj} \det(A_{kj}). \end{aligned}$$

A_{jk} entspricht hierbei A ohne j-te Zeile und k-te Spalte.

Invertierbarkeitskriterium: A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

Cramersche Regel: Ist A eine invertierbare Matrix, dann hat das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ die Lösung

$$\frac{1}{\det(A)} \big(\det(A_1), \ldots, \det(A_n) \big)^T,$$

wobei A_i aus A entsteht, indem man die i-te Spalte durch $\vec{b}$ ersetzt.

Inverse von 2×2 Matrizen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Inverse von $n \times n$ Matrizen:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(A^{\#}\right)^T \quad \text{mit} \quad \left(A^{\#}\right)_{jk} = (-1)^{j+k} \det(A_{jk}).$$

A_{jk} entspricht hierbei A ohne j-te Zeile und k-te Spalte.

Basen und Koordinatentransformation

Vektoren $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$, falls die Matrix $B = \left(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\right)$ Rang n hat, also $\det(B) \neq 0$.

Transformationsmatrix: Die Transformationsmatrix von einer Basis B zu einer Basis C ist die Matrix

$$T = C^{-1}B.$$

Hat ein Punkt die Koordinaten $\vec{v}_B$ zur Basis B und $\vec{v}_C$ zur Basis C, dann gilt

$$\vec{v}_C = T\vec{v}_B.$$

Kegelschnitte und Hauptachsentransformation

Die Gleichung

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$$

beschreibt einen Kegelschnitt. Äquivalent hierzu ist

$$\vec{x}^T A\vec{x} + \vec{p}^T\vec{x} + f = 0 \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ und } \vec{p} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}.$$

Fall $\det(A) \neq 0$:

- Berechne $\vec{q} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{p}$ und $C = \frac{1}{2}\vec{p}^T\vec{q} + f$.
- Die Substitution $\vec{x} = \vec{y} + \vec{q}$ liefert die Gleichung
$$\vec{y}^T A\vec{y} + C = 0.$$
- Bestimme die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A sowie normierte Eigenvektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ zu λ_1 und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ zu λ_2, wobei $\beta_1 = -\alpha_2 \geq 0$ gelten sollte.
- Für den Winkel $\varphi = \arccos(\alpha_1)$ gilt
$$S = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$
- Die Substitution $\vec{y} = S\vec{z}$ liefert die Gleichung
$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + C = 0.$$
- Für die Lösungsmenge für $\vec{z}$ gilt

Koeffizienten	Lösungsmenge
$C = 0$ und λ_1, λ_2 gleiches Vorzeichen	$\{0\}$
$C = 0$ und λ_1, λ_2 verschiedene Vorz.	zwei Geraden durch $(0, 0)$, $z_2 = \pm\sqrt{\left\lvert\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right\rvert} \cdot z_1$
Alle gleiches Vorz.	$\emptyset$
λ_1, λ_2 gleiches Vorz., C anderes Vorzeichen	Ellipse mit Achsenlängen $l_1 = \sqrt{\left\lvert\frac{C}{\lambda_1}\right\rvert}$, $l_2 = \sqrt{\left\lvert\frac{C}{\lambda_2}\right\rvert}$
λ_1, λ_2 versch. Vorz. C, λ_1 gleiches Vorz.	Hyperbel in 2. Hauptlage Scheitelpunkte bei $z_2 = \pm\sqrt{\left\lvert\frac{C}{\lambda_2}\right\rvert}$
λ_1, λ_2 versch. Vorz. C, λ_2 gleiches Vorz.	Hyperbel in 1. Hauptlage Scheitelpunkte bei $z_1 = \pm\sqrt{\left\lvert\frac{C}{\lambda_1}\right\rvert}$
beide vorigen Fälle	Asymptoten $z_2 = \pm\sqrt{\left\lvert\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right\rvert} \cdot z_1$

Die Lösungsmenge für $\vec{x}$ ist die Lösungsmenge für $\vec{z}$ um φ gedreht und danach um $\vec{q}$ verschoben.

Fall $\det(A) = 0$:

Falls $A = 0$, ist die Lösungsmenge eine Gerade, deren Lage von d, e, f abhängt. Ansonsten:

- Ein Eigenwert von A ist $\lambda_2 = 0$, berechne den anderen Eigenwert λ_1 und Eigenvektoren $\vec{v}_1$ zu λ_1 und $\vec{v}_2$ zu λ_2. Wähle dabei $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ wie im Fall $\det(A) \neq 0$.
- Berechne
$$\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = S^T\vec{p}.$$
- Bestimme den Drehwinkel φ wie im Fall $\det(A) \neq 0$.

- Die Substitution $\vec{x} = S\vec{y}$. liefert die Gleichung

$$\lambda_1 y_1^2 + gy_1 + hy_2 + f = 0.$$

- Falls $h = 0$, dann gilt für die Lösungsmenge für $\vec{y}$

Koeffizienten	Lösungsmenge
$g^2 - 4f\lambda_1 < 0$	$\emptyset$
$g^2 - 4f\lambda_1 = 0$	Gerade $y_1 = -\frac{g}{2\lambda_1}$
$g^2 - 4f\lambda_1 > 0$	zwei Geraden $y_1 = -\frac{g\pm\sqrt{g^2-4f\lambda_1}}{2\lambda_1}$

- Falls $h \neq 0$, dann ist die Lösungsmenge für $\vec{y}$ eine Parabel mit Scheitelpunkt $\left(-\frac{g}{2\lambda_1}, \frac{g^2}{4\lambda_1 h} - \frac{f}{h}\right)^T$, geöffnet nach oben, falls $\frac{h}{\lambda_1} < 0$, ansonsten nach unten geöffnet.

Die Lösungsmenge für $\vec{x}$ ist die Lösungsmenge für $\vec{y}$ um φ gedreht.

Lineare Differentialgleichungen

Die allg. Lösung einer homogenen DGL 1. Ordnung

$$a(x)y(x) + b(x)y'(x) = 0 \qquad \text{ist}$$

$$y_H(x) = C \cdot \exp\left(-\int \frac{a(x)}{b(x)}dx\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Variation der Konstanten:
Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

$$a(x)y(x) + b(x)y'(x) = f(x) \qquad \text{ist}$$

$$y_I(x) = s(x) \cdot \int \frac{f(x)}{b(x)s(x)}dx,$$

$$\text{mit } s(x) = \exp\left(-\int \frac{a(x)}{b(x)}dx\right).$$

Charakteristisches Polynom: Zu einer DGL

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

gibt es das charakteristische Polynom

$$a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0.$$

Allg. Lösung einer homogenen DGL mit konstanten Koeffizienten: Ein Fundamentalsystem einer homogenen DGL ist gegeben durch die folgenden Funktionen:

- Für jede reelle Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms die Funktionen $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$, wobei k die Vielfachheit der Nullstelle ist, sowie
- für jedes Paar komplexer Nullstellen $\alpha \pm \beta i$ des charakteristischen Polynoms die Funktionen $e^{\alpha x}\sin(\beta x), xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ und $e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, wobei k die Vielfachheit der Nullstellen ist.

Variation der Konstanten bei DGL zweiter Ordnung: Ist $y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

dann ist $y_I(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ eine Lösung der inhomogenen DGL

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \qquad \text{wobei}$$

$$c_1(x) = -\int \frac{f(x)y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}dx \quad \text{und}$$

$$c_2(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}dx.$$

Spezielle Ansätze für partikuläre Lösungen:

Störfunktion	**Ansatz für $y_I(x)$**	**Nullst.?**
$P(x)$	$Q(x)$	0
$e^{\alpha x}P(x)$	$e^{\alpha x}Q(x)$	α
$P(x)\sin(\beta x)$, $Q(x)\cos(\beta x)$ oder gemischt	$R(x)\sin(\beta x) + S(x)\cos(\beta x)$	βi
$ae^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $be^{\alpha x}\cos(\beta x)$ oder gemischt	$e^{\alpha x}\big(c\sin(\beta x) + d\cos(\beta x)\big)$	$\alpha + \beta i$

Der Grad der Polynome im speziellen Ansatz ist so groß wie der größte Grad der Polynome in der Störfunktion. Ist 0, α, βi oder $\alpha + \beta i$ eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, muss der Ansatz mit x^k multipliziert werden.

Systeme von Differentialgleichungen

Homogene Systeme: Hat die $n \times n$ Matrix A ausschließlich Eigenwerte der Vielfachheiten 1 und 2, dann ist ein Fundamentalsystem des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

gegeben durch die folgenden Funktionen:

- Für jeden einfachen Eigenwert λ_i mit Eigenvektor $\vec{v}_i$ die Funktion $e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$,
- für jeden doppelten Eigenwert λ_i mit zwei linear unabhängigen Eigenvektoren $\vec{v}_i$, $\vec{w}_i$ die Funktionen $e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$ und $e^{\lambda_i t}\vec{w}_i$,
- für jeden doppelten Eigenwert λ_i, für den es keine zwei linear unabhängigen Eigenvektoren gibt, die Funktionen $e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$ und $e^{\lambda_i t}(t\vec{v}_i + \vec{w}_i)$, wobei $\vec{v}_i$ ein Eigenvektor zu λ_i ist und $\vec{w}_i$ ein Vektor mit

$$(A - \lambda_i I_n)\vec{w}_i = \vec{v}_i.$$

Inhomogene Systeme: Bilden $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ ein Fundamentalsystem des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x},$$

dann ist

$$\vec{x}_I(t) = \vec{Y}(t)\vec{c}(t)$$

eine Lösung des inhomogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{s},$$

wobei $\vec{Y}(t)$ die Matrix $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ ist und $\vec{c}(t)$ durch

$$\dot{\vec{c}} = \vec{Y}(t)^{-1}\vec{s}$$

bestimmt wird.