Formelsammlung zur zweiten Übungsklausur

Mathematik II, M, Sommersemester 2019

Ebene Kurven

	Kartesische Koordinaten	Parameterdarstellung
Kreis	$x^2+y^2=R^2$	$x(t)=R\cos(t)$ $y(t)=R\sin(t)$
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$x(t)=a\cos(t)$ $y(t)=b\sin(t)$
Hyperbel	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$x(t)=\pm a\cosh(t)$ $y(t)=b\sinh(t)$

Tangente: $\dot{\vec{v}}(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix}$. *Singulärer Punkt:* Tangente $\vec{0}$.

Bogenlänge: $s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$

In Polarkoordinaten: $s=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r'(\varphi)^2+r(\varphi)^2}d\varphi$

Krümmung:

Parameterdarstellung $\kappa=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$ Falls $y=y(x)$ $\kappa=\dfrac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

Krümmungskreis: Kreis mit Radius $\frac{1}{\kappa(P)}$ und Mittelpunkt (ξ,η) berührt Kurve in P und hat Krümmung κ.

$$\xi=x-\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\dot{y}}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}\quad\text{und}\quad\eta=y+\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\dot{x}}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}$$

in Parameterdarstellung. Falls $y=y(x)$, dann

$$\xi=x-\frac{(1+(y')^2)y'}{y''}\quad\text{und}\quad\eta=y+\frac{1+(y')^2}{y''}.$$

Evolute: Menge der Mittelpunkte der Krümmungskreise

Überstrichener Flächeninhalt:

Parameterdarstellung $A=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(x\dot{y}-\dot{x}y)\,dt$ Polarkoordinaten $A=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}r(\varphi)^2d\varphi$

Raumkurven

Bogenlänge: $s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2}dt$

Tangentenvektor $\vec{t}=\dfrac{d\vec{x}}{ds}=\dfrac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$

Hauptnormalvektor $\vec{n}=\dfrac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|}=\dfrac{\ddot{\vec{x}}-\left\langle\ddot{\vec{x}},\vec{t}\right\rangle\vec{t}}{\left|\ddot{\vec{x}}-\left\langle\ddot{\vec{x}},\vec{t}\right\rangle\vec{t}\right|}=\vec{b}\times\vec{t}$

Binormalvektor $\vec{b}=\dfrac{\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}}{\left|\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}\right|}=\vec{t}\times\vec{n}$

Krümmung: $\kappa=\left|\dfrac{d\vec{t}}{ds}\right|=\dfrac{|\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}$

Torsion: $\tau=-\left\langle\dfrac{d\vec{b}}{ds},\vec{n}\right\rangle=\left\langle\vec{b},\dfrac{d\vec{n}}{ds}\right\rangle=\dfrac{\left\langle\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}},\dddot{\vec{x}}\right\rangle}{|\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}|^2}$

Differentialrechnung in mehreren Variablen

Richtungsableitung in Richtung $\vec{r}$ (mit $|\vec{r}|=1$): $\langle\nabla f,\vec{r}\rangle$.

Divergenz: Für $\vec{v}(x,y)=\begin{pmatrix}P(x,y)\\ Q(x,y)\end{pmatrix}$ ist $\operatorname{div}\vec{v}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$.

Für $\vec{v}(x,y,z)=\begin{pmatrix}P(x,y,z)\\ Q(x,y,z)\\ R(x,y,z)\end{pmatrix}$ ist $\operatorname{div}\vec{v}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$.

(x,y,z) ist *Quelle*, falls $\operatorname{div}\vec{v}(x,y,z)>0$, und *Senke*, falls $\operatorname{div}\vec{v}(x,y,z)<0$. Keine Quellen oder Senken: *quellenfrei*.

Rotation: $\operatorname{rot}\vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\end{pmatrix}$. Das Feld heißt *wirbelfrei*, falls die Rotation überall dem Nullvektor entspricht.

Implizite Funktionen

Kurve in impliziter Form: $K=\{(x,y)\mid f(x,y)=0\}$.
Singulärer Punkt auf K: $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$.
Tangente horizontal: $f_x(x_0,y_0)=0$ und $f_y(x_0,y_0)\neq 0$.
Tangente vertikal: $f_y(x_0,y_0)=0$ und $f_x(x_0,y_0)\neq 0$.
Tangentengleichung allgemein:

$$y=y_0-\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}(x-x_0),\quad\text{falls } f_y(x_0,y_0)\neq 0$$
$$x=x_0,\quad\text{falls } f_y(x_0,y_0)=0.$$

Extremwerte von Funktionen in 2 Variablen

Hesse-Matrix H_f *positiv definit*, falls beide Eigenwerte positiv, *negativ definit*, falls beide Eigenwerte negativ, *indefinit*, falls ein positiver und ein negativer Eigenwert.
Hauptminoren von H_f: $\Delta_1=f_{xx}$ und $\Delta_2=\det(H_f)$.
Kriterium für Definitheit: H_f pos. definit $\Leftrightarrow\Delta_1,\Delta_2>0$.
H_f neg. definit $\Leftrightarrow\Delta_1<0$ und $\Delta_2>0$.
H_f indefinit $\Leftrightarrow\Delta_2<0$.
Notwendige Bedingung für Extrema: An Extremstellen im Inneren des Definitionsbereichs ist der Gradient Null.
Hinreichende Bedingung für Extrema: Eine Stelle mit Gradient Null ist ein Maximum, falls die Hesse-Matrix negativ definit ist, ein Minimum, falls H_f positiv definit ist, und ein Sattelpunkt, falls H_f indefinit ist.
Randextrema:

- Ist (x_0,y_0) ein Maximum von f auf dem Rand des Gebietes G, und zeigt der Gradient bei (x_0,y_0) in G hinein, so ist (x_0,y_0) *kein* Maximum auf G.
- Ist (x_0,y_0) ein Minimum von f auf dem Rand des Gebietes G, und zeigt der Gradient bei (x_0,y_0) aus G hinaus, so ist (x_0,y_0) *kein* Minimum auf G.

Ein Gebiet heißt *kompakt*, falls es beschränkt ist und jeden seiner Randpunkte enthält.
Eine stetige Funktion hat auf einem kompakten Gebiet stets ein globales Maximum und ein globales Minimum.

Extrema unter Nebenbedingungen

Ein Extremum von $f(x,y)$ unter der Bedingung $g(x,y)=0$ erfüllt für $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$ stets $\nabla F=0$.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bernoullische DGL: $y'+f(x)y+g(x)y^\alpha=0$ mit $\alpha\neq 0,1$

- Substituiere $z=y^{1-\alpha}$.
- Bestimme die Lösung von $\frac{z'}{1-\alpha}+f(x)z=-g(x)$.
- Lösung der ursprünglichen DGL ist $y=z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ und für positives α auch $y=0$.

Riccatische DGL: $y' + f(x)y + g(x)y^2 = h(x)$

- Finde part. Lösung y_p (z.B. durch Ansatz $y = ax+b$, $y = ax^b$ oder $y = ae^{bx}$) und substituiere $y = z + y_p$.
- Bestimme die Lösung von $z' + (f(x) + 2g(x)y_p)z + g(x)z^2 = 0$ und setze dies in $y = z + y_p$ ein.

Exakte DGL: $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ heißt *exakt*, falls $P_y = Q_x$. Es gibt dann eine Funktion $F(x,y)$, so dass die allgemeine Lösung durch die Gleichung $F(x,y) = c$ beschrieben wird. Man findet F wie folgt.

- Setze $F = \int P dx + \Phi(y)$ und berechne Φ aus der Bedingung $F_y = Q$ oder
- setze $F = \int Q dy + \Psi(x)$ und berechne Ψ aus der Bedingung $F_x = P$.

Integrierender Faktor: Ist $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ nicht exakt, suche eine Funktion $M(x)$ oder $M(y)$ mit

$$M \cdot (P_y - Q_x) = M_x Q \quad \text{bzw.} \quad M \cdot (P_y - Q_x) = -M_y P.$$

Die DGL $MP(x,y) + MQ(x,y)y' = 0$ ist dann exakt.

Clairautsche DGL: $y = xy' + h(y')$ hat die Lösungen $y = cx + h(c)$ für $c \in \mathbb{R}$. Einhüllende der Lösungen ist die Kurve $(x,y) = \big(-h'(t), -h'(t)t + h(t)\big)$.

DGL zweiter Ordnung:

- $y'' = f(x) \Longrightarrow y = \int \left(\int f(x)dx\right) dx + c_1 x + c_2$
- $y'' = f(x, y') \rightsquigarrow$ substituiere $z = y'$
- $y'' = f(y, y') \rightsquigarrow$ Löse die DGL $z' \cdot z = f(y,z)$. Löse dann die DGL $y' = z(y)$.

Eulersche DGL: $a_3x^3y''' + a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$. Substituiere $x = e^t$ und $v(t) = y(e^t)$. Dann ist

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{-t} \cdot \dot{v}(t), \\ y''(x) &= e^{-2t} \cdot (\ddot{v}(t) - \dot{v}(t)), \\ \text{und} \qquad y'''(x) &= e^{-3t} \cdot (\dddot{v}(t) - 3\ddot{v}(t) + 2\dot{v}(t)). \end{aligned}$$

Mehrfachintegrale

Normalbereich: Ein Bereich der Form

$$B = \{(x,y) \mid a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$$

heißt Normalbereich bezüglich der y-Achse. Das Integral einer Funktion $f(x,y)$ über B ist dann

$$\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Für einen Normalbereich bezüglich der x-Achse

$$B = \{(x,y) \mid a \le y \le b, g(y) \le x \le h(y)\}$$

ist das Integral entsprechend

$$\int_a^b \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Masse und Schwerpunkt: Eine Fläche B in der x,y Ebene mit Dichtefunktion $\rho(x,y)$ hat

Gesamtmasse	$M = \iint_B \rho(x,y)dxdy$
Stat. Moment zur x-Achse	$M_x = \iint_B y \cdot \rho(x,y)dxdy$
Stat. Moment zur y-Achse	$M_y = \iint_B x \cdot \rho(x,y)dxdy$
Schwerpunkt	$S = \left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M}\right)$

Oberflächeninhalt: Die Fläche, die eine Funktion $f(x,y)$ über einem Bereich B definiert, hat den Inhalt

$$O = \iint_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy.$$

Masse und Schwerpunkt: Ein Bereich B im Raum mit Dichtefunktion $\rho(x,y,z)$ hat

Gesamtmasse	$M = \iiint_B \rho(x,y,z)dxdydz$
Schwerpunkt $\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix}$	$x_s = \dfrac{\iiint_B x \cdot \rho(x,y,z)dxdydz}{M}$
	$y_s = \dfrac{\iiint_B y \cdot \rho(x,y,z)dxdydz}{M}$
	$z_s = \dfrac{\iiint_B z \cdot \rho(x,y,z)dxdydz}{M}$

Trägheitsmoment:

$$I_x = \iiint_B (y^2 + z^2) \cdot \rho(x,y,z)dxdydz \quad \text{bzgl. } x\text{-Achse}$$

$$I_y = \iiint_B (x^2 + z^2) \cdot \rho(x,y,z)dxdydz \quad \text{bzgl. } y\text{-Achse}$$

$$I_z = \iiint_B (x^2 + y^2) \cdot \rho(x,y,z)dxdydz \quad \text{bzgl. } z\text{-Achse}$$

Polarkoordinaten: Für $x(r,\varphi) = r\cos(\varphi)$, $y(r,\varphi) = r\sin(\varphi)$ und $g(r,\varphi) = f\big(x(r,\varphi), y(r,\varphi)\big)$ gilt

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \iint_B r \cdot g(r,\varphi)drd\varphi.$$

Kugelkoordinaten: Für $x(r,\varphi,\theta) = r\cos(\varphi)\sin(\theta)$, $y(r,\varphi,\theta) = r\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z(r,\varphi,\theta) = r\cos(\theta)$ und $g(r,\varphi,\theta) = f\big(x(r,\varphi,\theta), y(r,\varphi,\theta), z(r,\varphi,\theta)\big)$ gilt

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \iiint_B r^2\sin(\theta) \cdot g(r,\varphi,\theta)drd\varphi d\theta.$$

Zylinderkoordinaten: Für $x(r,\varphi,z) = r\cos(\varphi)$, $y(r,\varphi,z) = r\sin(\varphi)$, $z(r,\varphi,z) = z$ und $g(r,\varphi,z) = f\big(x(r,\varphi,z), y(r,\varphi,z), z(r,\varphi,z)\big)$ gilt

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \iiint_B r \cdot g(r,\varphi,z)drd\varphi dz.$$

Kurvenintegrale: Das Integral über ein Vektorfeld

$$\vec{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$$

entlang einer Kurve $\vec{x}(t)$ ist definiert als

$$\int \left\langle \vec{K}\big(\vec{x}(t)\big), \dot{\vec{x}}(t) \right\rangle dt.$$

Oberflächenintegrale: Ist $\vec{K}$ ein Vektorfeld und F ein Flächenstück, dann ist das Integral von $\vec{K}$ auf F

$$\iint_B \left\langle \vec{K}\big(x,y,f(x,y)\big), \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dxdy,$$

wenn F in der Form $z = f(x,y)$ mit $(x,y) \in B$ gegeben ist und

$$\iint_B \left\langle \vec{K}\big(\vec{x}(u,v)\big), \vec{x}_u \times \vec{x}_v \right\rangle dudv,$$

wenn F in Parameterform $\vec{x}(u,v)$ gegeben ist.