

Diskrete Mathematik für Informatikstudien Sommersemester 2020

10. Übungsblatt (26.5.2020)

Bei einigen der Beispiele auf diesem Blatt werden Sie Polynome multiplizieren müssen. Versuchen Sie, dabei soweit es geht auf Hilfe von Computern zu verzichten (außer bei Beispiel 10.5). Die Rechenschritte sollten Sie in Ihrer Lösung auf jeden Fall hinschreiben. Sie können sich den Aufwand dabei deutlich verringern, wenn Sie nur diejenigen Terme hinschreiben, die für die Lösung benötigt werden. Sind zum Beispiel alle Terme größer als x^7 für die Lösung irrelevant, können Sie alle höheren Potenzen weglassen und dies durch ... andeuten (also z.B. $1 + x^3 + 2x^5 + 5x^7 + \dots$).

Beispiel 10.1. Zeigen Sie, dass

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}^2,$$

indem Sie die Reihenentwicklungen von $(1+x)^{2n}$ und $(1+x)^n(1+x)^n$ vergleichen.

Beispiel 10.2. In einer Urne sind jeweils 6 schwarze, weiße, rote und grüne Kugeln. Bestimmen Sie mittels erzeugender Funktionen

(a) die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von 8 Kugeln, wobei

- mindestens zwei schwarze Kugeln,
- eine ungerade Anzahl weißer Kugeln,
- keine rote Kugeln und
- höchstens zwei grüne Kugeln

entnommen werden;

(b) die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von 7 Kugeln, wobei

- genau doppelt so viele schwarze wie weiße Kugeln und
- genau eine rote Kugel mehr als grüne Kugeln

entnommen werden.

Beispiel 10.3. Zur Mitte des 20. Jahrhunderts gab es in Großbritannien folgende Münzen und Banknoten mit einem Wert von bis zu einem Pfund (aufsteigend nach Wert sortiert).

- Farthing (Viertelpenny);
- Penny, Threepence (drei Pennies) und Sixpence (sechs Pennies);
- Shilling (zwölf Pennies), Florin (zwei Shilling), Half Crown (zwei Shilling und ein Sixpence), Ten Bob (zehn Shilling);
- Sovereign (zwanzig Shilling bzw. ein Pfund).

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion, mit welcher die Anzahl verschiedener Möglichkeiten ermittelt werden kann, einen gewissen Geldbetrag zu bezahlen. Lesen Sie aus dieser Funktion die Anzahl an Möglichkeiten ab, Ware im Wert von dreieinhalb Pennies zu bezahlen.

Beispiel 10.4. Beim Snooker (einer Billard-Variante) gibt es 15 rote Kugeln und 6 weitere Kugeln in verschiedenen Farben. Die einzelnen Kugeln haben folgende Punktwerte.

Kugel	rot	gelb	grün	braun	blau	pink	schwarz
Punkte	1	2	3	4	5	6	7

Ein *Break* besteht aus dem Versenken einer roten Kugel, gefolgt von einer anderen Farbe, dann wieder eine rote Kugel, eine andere Farbe etc., bis irgendwann die gewünschte Kugel nicht versenkt wird. Die Punkte werden hierbei summiert. Die nicht-roten Kugeln werden hierbei nach jedem Versenken wieder auf dem Tisch platziert, können also mehrfach versenkt werden. Ermitteln Sie mit Hilfe erzeugender Funktionen, wie viele Möglichkeiten es jeweils für ein Break mit $k = 1, 2, \dots, 10$ Punkten gibt, wenn man die Reihenfolge, in der die Kugeln versenkt wurden, vernachlässigt. (Also z.B. rot-gelb-rot-blau und rot-blau-rot-gelb werden für dieses Beispiel nicht unterschieden.)

Beispiel 10.5. Berechnen Sie mit Hilfe erzeugender Funktionen, wie viele Möglichkeiten es gibt, mit genau 7 Münzen einen Betrag von 25 Cent zu bezahlen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn man *höchstens* 7 Münzen verwenden möchte? Verwenden Sie bei diesem Beispiel für die Rechenschritte Computerhilfe. (Notieren Sie aber, welches Programm Sie verwendet haben und welche Befehle Sie eingegeben haben.)

Hinweis: Versuchen Sie, analog zu Beispiel 2.23 im Skript vorzugehen, wobei Sie eine Münze im Wert von k Cent durch $x^k y$ darstellen.