Diskrete Mathematik für Informatikstudien
Sommersemester 2020

12. Übungsblatt (16.6.2020)

Beispiel 12.1. Wir betrachten den gerichteten Graphen D mit Knotenmenge $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ und Kantenmenge

$$\big\{[v_1 \to v_3], [v_1 \to v_4], [v_2 \to v_1], [v_2 \to v_3], [v_3 \to v_4], [v_4 \to v_1], [v_4 \to v_2]\big\}.$$

(Hierbei bezeichnet die Schreibweise $[x \to y]$ eine gerichtete Kante von x nach y, d.h. mit Anfangsknoten x und Endknoten y.)

Zeichnen Sie den Graphen und stellen Sie seine Adjazenzmatrix auf. Berechnen Sie anschließend für alle Knoten x, y von D die Anzahl der gerichteten Wege der Länge 8 von x nach y.

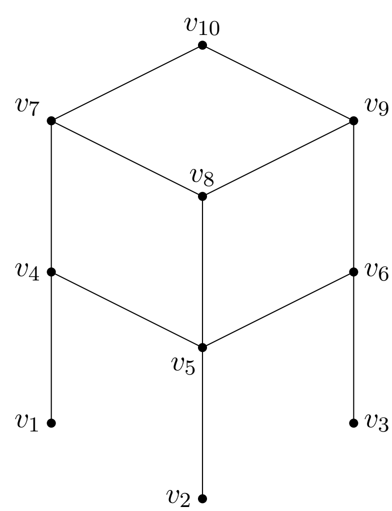
Beispiel 12.2. Berechnen Sie für den Graphen G mit Knotenmenge $\{v_1, v_2, v_3\}$ und Kantenmenge $\{[v_1, v_2], [v_1, v_3], [v_2, v_3]\}$ die Anzahl der Wege der Länge n (mit allgemeinem $n \in \mathbb{N}_0$) von v_1 nach v_2.

Hinweis: Sie werden eine Koordinate der Matrix $W(x) = (I - xA)^{-1}$ berechnen müssen, wobei A die Adjazenzmatrix von G bezeichnet und I die (3×3)-Einheitsmatrix ist. Mit Hilfe von Determinanten kann man dies erledigen, ohne die gesamte Matrix $W(x)$ ausrechnen zu müssen.

Beispiel 12.3. Der Graph G mit Knotenmenge $\{v_1, \dots, v_{10}\}$ und Kantenmenge

$$\{[v_1, v_4], [v_2, v_5], [v_3, v_6], [v_4, v_5], [v_4, v_7], [v_5, v_6],$$
$$[v_5, v_8], [v_6, v_9], [v_7, v_8], [v_7, v_{10}], [v_8, v_9], [v_9, v_{10}]\}$$

kann wie folgt gezeichnet werden.



Konstruieren Sie einen BFS-Baum und einen DFS-Baum von G, jeweils ausgehend von der Wurzel v_1. Verwenden Sie dabei folgende Regel: Wann immer im Algorithmus mehrere Nachbarn des aktuell betrachteten Knoten zur Auswahl stehen, wählen Sie den Knoten mit dem kleinsten Index.

Notieren Sie für jeden Schritt der Algorithmen die Liste zu Beginn dieses Schrittes, die zum Baum hinzugefügte Kante (falls in dem Schritt eine Kante hinzugefügt wird) und die Änderung, die an der Liste vorgenommen wird (z.B. „füge v_3 am Ende/am Anfang hinzu“ oder „entferne v_7“).

Beispiel 12.4. Ermitteln Sie die Anzahl der Spannbäume des bipartiten Graphen $K_{2,3}$ mit Knotenmenge $\{v_1, v_2, w_1, w_2, w_3\}$ und Kantenmenge $\{[v_i, w_j] \mid i \in \{1, 2\} \wedge j \in \{1, 2, 3\}\}$.

Beispiel 12.5. Im Graphen G mit Knotenmenge $\{v_1, \ldots, v_8\}$ und Kantenmenge

$$\{[v_1, v_2], [v_1, v_5], [v_1, v_8], [v_2, v_3], [v_2, v_8], [v_3, v_4], [v_3, v_7], [v_4, v_5], [v_4, v_6], [v_5, v_6], [v_6, v_7], [v_7, v_8]\}$$

habe jede Kante $[v_i, v_j]$ das Gewicht $i+j$. Zeichnen Sie den Graphen (inklusive Kantengewichte) und führen Sie den Algorithmus von Kruskal durch, um einen Spannbaum von minimalem Gesamtgewicht zu finden. Ist dieser minimale Spannbaum eindeutig?

Schreiben Sie für jeden Schritt des Algorithmus auf, warum die gerade betrachtete Kante hinzugefügt oder nicht hinzugefügt wird.