

Diskrete Mathematik für Informatikstudien

Sommersemester 2020

13. Übungsblatt (23.6.2020)

Beispiel 13.1. Im bipartiten Graphen G mit Seiten $A = \{a_1, \dots, a_5\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_5\}$ und Kantenmenge

$$\{[a_1, b_1], [a_1, b_2], [a_1, b_3], [a_2, b_3], [a_2, b_5], [a_3, b_1], [a_3, b_2], [a_3, b_3], [a_3, b_4], [a_3, b_5], [a_4, b_3], [a_4, b_5], [a_5, b_3], [a_5, b_5]\}$$

ist das Matching

$$M = \{[a_1, b_2], [a_3, b_3], [a_5, b_5]\}$$

gegeben. Wenden Sie Breitensuche an, um einen verbessernden Pfad P zu finden (Algorithmus 4.7 auf den Seiten D.21–22 im Skript oder die in der Vorlesung am 19. Mai gezeigte Variante). Notieren Sie dabei für jeden Schritt des Algorithmus analog zu Beispiel 12.3 die jeweiligen Zwischenstände.

Welche Kanten liegen im Matching $M' = M \Delta E(P)$ (symmetrische Differenz)? Ist M' ein größtmögliches Matching in G ?

Beispiel 13.2. Zu einem Graphen G mit n Knoten definieren wir

$$\omega(G) := \max\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ enthält } K^k\},$$

$$\alpha(G) := \max\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ enthält } k \text{ Knoten, zwischen denen keinerlei Kanten verlaufen}\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$(a) \quad \chi(G) \geq \omega(G); \quad (b) \quad \chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}.$$

Beispiel 13.3. Wir betrachten den bipartiten Graphen G mit Seiten $A = \{a_1, \dots, a_6\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_6\}$ und Kantenmenge $\{[a_i, b_j] \mid i, j \in \{1, \dots, 6\} \wedge i \neq j\}$. Ermitteln Sie durch den Greedy-Algorithmus eine Färbung von G , wobei Sie die Knoten in der Reihenfolge $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_6, b_6$ betrachten. Begründen Sie in jedem Schritt des Algorithmus, warum für den jeweiligen Knoten die behauptete Farbe gewählt werden muss. Wie viele Farben benötigt der Algorithmus?

Vertauschen Sie in der oben genannten Reihenfolge der Knoten die Positionen von a_2 und b_1 (und lassen die Reihenfolge ansonsten unverändert) und führen Sie den Greedy-Algorithmus erneut durch, inklusive der Beschreibung der Schritte wie im ersten Durchgang.

Beispiel 13.4. Formulieren Sie analog zum Greedy-Algorithmus einen Algorithmus für Kantenfärbungen und zeigen Sie, dass dieser für jeden Graphen G mindestens $\Delta(G)$ und höchstens $2\Delta(G) - 1$ Farben verwendet. Hierbei bezeichnet $\Delta(G)$ den Maximalgrad des Graphen (siehe auch Bemerkung 5.6 auf Seite D.24 im Skript).

Beispiel 13.5. Ist der Graph G mit Knotenmenge $\{v_1, \dots, v_6\}$ und Kantenmenge

$$\{[v_1, v_2], [v_1, v_3], [v_1, v_4], [v_1, v_6], [v_2, v_3], [v_2, v_4], \\ [v_3, v_4], [v_3, v_5], [v_3, v_6], [v_4, v_5], [v_4, v_6], [v_5, v_6]\}$$

planar?

- Falls G planar ist: Zeichnen Sie G ohne Überkreuzen von Kanten in die Ebene. Kann man noch Kanten zu G hinzufügen, so dass der Graph planar bleibt? Wenn ja, welche? Wenn nein, warum nicht?
- Falls G nicht planar ist: Begründen Sie, warum es keine Zeichnung ohne Überkreuzen der Kanten geben kann. Welche Kanten muss man entfernen, damit G planar wird? Geben Sie dafür ein Beispiel und eine dazugehörige Zeichnung an.

Bemerkung: Um zu zeigen, dass ein Graph *nicht* planar ist, genügt es nicht, „drauf los zu zeichnen“ und zu bemerken, dass man nicht alle Kanten einzeichnen kann. Verwenden Sie stattdessen eine Aussage aus der Vorlesung.