Diskrete Mathematik für Informatikstudien
Sommersemester 2020

2. Übungsblatt (17.3.2020)

Beispiel 2.1. Berechnen Sie für die folgenden Zahlenpaare (m, n) mit Hilfe des euklidischen Algorithmus jeweils $\mathrm{ggT}(m, n)$ und Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit

$$am + bn = \mathrm{ggT}(m, n).$$

(a) $m = 2020$, $n = 42$;

(b) $m = 392$, $n = 553$.

Beispiel 2.2. Zeigen Sie per Induktion, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ entweder selbst eine Primzahl ist oder durch eine Primzahl p mit $p \leq \sqrt{n}$ teilbar ist.

Beispiel 2.3. Zeigen Sie, dass für $m, n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{ggT}(m, n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\{\nu_m(p), \nu_n(p)\}} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{kgV}(m, n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max\{\nu_m(p), \nu_n(p)\}}$$

gilt und folgern Sie hieraus, dass $m \cdot n = \mathrm{ggT}(m, n) \cdot \mathrm{kgV}(m, n)$.

Erinnerung. Mit $\nu_n(p)$ wird diejenige Zahl bezeichnet, für welche $p^{\nu_n(p)} \mid n$ aber *nicht* $p^{\nu_n(p)+1} \mid n$.

Beispiel 2.4. Verfassen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, welcher zu einer gegebenen Zahl $n \in \mathbb{N}$ und einer Liste aller Primzahlen $p \leq n$ die Primfaktorzerlegung von n ermittelt. Führen Sie den Algorithmus für das Beispiel $n = 1911$ an der Tafel durch.

Beispiel 2.5. Die *Fibonacci-Zahlen* $F_0, F_1, \ldots$ sind rekursiv definiert durch

$$F_0 = F_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Zeigen Sie per Induktion, dass $\mathrm{ggT}(F_n, F_{n-1}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.