

Diskrete Mathematik für Informatikstudien Sommersemester 2020

5. Übungsblatt (21.4.2020)

Beispiel 5.1. Mit welchen der folgenden Verknüpfungen \circ bildet (\mathbb{R}, \circ) eine Halbgruppe, ein Monoid oder sogar eine Gruppe?

(a) $x \circ y = x$

(b) $x \circ y = x + y - 1$

Beispiel 5.2. Wir wissen aus der Vorlesung, dass für jede natürliche Zahl m die Menge

$$\mathbb{G}(m) := \{[k]_m \in \mathbb{Z}_m \mid \text{ggT}(k, m) = 1\}$$

mit der Verknüpfung $[a]_m \circ [b]_m := [ab]_m$ eine Gruppe bildet.

(a) Geben Sie die Menge $\mathbb{G}(24)$ an und bestimmen Sie die Ordnung aller ihrer Elemente.

(b) Besitzt $\mathbb{G}(24)$ eine Untergruppe der Ordnung 3 oder der Ordnung 4? Geben Sie jeweils eine solche Untergruppe an oder begründen Sie, warum sie nicht existiert.

Beispiel 5.3. Berechnen Sie

$$\varphi(618750) \quad \text{und} \quad \varphi(169169).$$

Beispiel 5.4. Gesucht sind die letzten drei Ziffern in der Dezimaldarstellung von

$$a = 4^{20202104}.$$

Berechnen Sie zu diesem Zweck zunächst $r_1 \in \{0, 1, \dots, 7\}$ und $r_2 \in \{0, 1, \dots, 124\}$ mit

$$a \equiv r_1 \pmod{8} \quad \text{und} \quad a \equiv r_2 \pmod{125}$$

und verwenden Sie danach den chinesischen Restsatz, um $a \pmod{1000}$ zu berechnen.

Beispiel 5.5. Ermitteln Sie $a, b, c \in \{0, 1, \dots, 24\}$, so dass

$$(4^{21})^{2020} \equiv a \pmod{25}, \quad (31^{41})^{59} \equiv b \pmod{25} \quad \text{und} \quad 31^{(41^{59})} \equiv c \pmod{25}.$$