Diskrete Mathematik für Informatikstudien
Sommersemester 2020

7. Übungsblatt (5.5.2020)

Beispiel 7.1. Gegeben sind die aussagenlogischen Variablen A, B und C.

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, für welche Belegungen von A, B und C mit Wahrheitswerten die folgenden Formeln X_1, Y_1, X_2, Y_2 wahr sind.

$$X_1 = (A \to B) \to C \qquad Y_1 = A \to (B \to C)$$
$$X_2 = (A \lor B) \lor C \qquad Y_2 = A \lor (B \lor C)$$

(b) Überprüfen Sie anhand der Wahrheitstafeln aus (a), welche der Formeln $X_1 \to Y_1$, $Y_1 \to X_1$, $X_2 \to Y_2$ und $Y_2 \to X_2$ Tautologien sind.

Beispiel 7.2. Dem Speiseplan einer Mensa soll ein neues Menü hinzugefügt werden. Dabei gelten die folgenden Bedingungen.

(i) Das Menü muss Brot beinhalten, falls kein Dessert dabei ist.

(ii) Gehören Brot und Dessert zum Menü, darf es dazu keine Suppe geben.

(iii) Wenn im Menü aber Suppe enthalten ist oder kein Dessert dazu gehört, darf es kein Brot geben.

Bilden Sie Formeln X, Y, Z der Aussagenlogik, die jeweils den Bedingungen (i), (ii) und (iii) entsprechen. Stellen Sie eine Wahrheitstafel für diese Formeln auf und finden Sie anschließend eine möglichst einfache Formel, die zu $X \land Y \land Z$ äquivalent ist.

Beispiel 7.3. Gegeben seien aussagenlogische Formeln X und Y. Außerdem sei T eine Tautologie und K eine Kontradiktion.

(a) Erstellen Sie eine Wahrheitstafel für die Formel $X \leftrightarrow Y$ und begründen Sie anhand dieser Tafel, dass diese Formel genau dann eine Tautologie ist, falls $X \Leftrightarrow Y$.

(b) Zeigen Sie anhand einer Wahrheitstafel, dass

$$X \to T \iff T, \qquad T \to X \iff X, \qquad X \to K \iff \neg X \qquad \text{und} \qquad K \to X \iff T.$$

Verwenden Sie für die folgenden beiden Aufgaben keine Wahrheitstafeln, sondern ausschließlich die Regeln auf der zweiten Seite dieses Übungsblattes.

Beispiel 7.4. Gegeben sind aussagenlogische Formeln X und Y. Zeigen Sie

(a) $(X \to Y) \land \neg Y \quad \Longrightarrow \quad \neg X$;

(b) $X \to \Big(\big(Y \to (X \to Y)\big) \to X\Big) \quad \iff \quad \top$.

Bemerkung: Die Regel (a) heißt „Modus Tollens".

Beispiel 7.5. Gegeben sind aussagenlogische Formeln X, Y und Z. Zeigen Sie, dass die folgenden drei Formeln äquivalent sind.

$$X \to (Y \to Z), \qquad Y \to (X \to Z) \qquad \text{und} \qquad (X \land Y) \to Z.$$

Liste der erlaubten Regeln

Für jegliche aussagenlogische Formeln X, Y, Z gelten die folgenden Regeln.

$$\neg\neg X \iff X \tag{1}$$
$$(X \land Y) \land Z \iff X \land (Y \land Z) \tag{2}$$
$$(X \lor Y) \lor Z \iff X \lor (Y \lor Z) \tag{3}$$
$$X \land Y \iff Y \land X \tag{4}$$
$$X \lor Y \iff Y \lor X \tag{5}$$
$$X \land (Y \lor Z) \iff (X \land Y) \lor (X \land Z) \tag{6}$$
$$X \lor (Y \land Z) \iff (X \lor Y) \land (X \lor Z) \tag{7}$$
$$\neg(X \lor Y) \iff \neg X \land \neg Y \tag{8}$$
$$\neg(X \land Y) \iff \neg X \lor \neg Y \tag{9}$$
$$X \to Y \iff \neg X \lor Y \tag{10}$$
$$X \to Y \iff \neg Y \to \neg X \tag{11}$$
$$X \lor \neg X \iff \top \tag{12}$$
$$X \land \neg X \iff \bot \tag{13}$$
$$X \lor \top \iff \top \tag{14}$$
$$X \land \bot \iff \bot \tag{15}$$
$$(X \to Y) \land (Y \to Z) \implies (X \to Z) \tag{16}$$
$$\bot \implies X \tag{17}$$
$$X \implies \top \tag{18}$$
$$X \land \top \iff X \tag{19}$$
$$X \lor \bot \iff X \tag{20}$$
$$X \land X \iff X \tag{21}$$
$$X \lor X \iff X \tag{22}$$
$$X \land Y \implies X \tag{23}$$
$$X \implies X \lor Y \tag{24}$$
$$X \leftrightarrow Y \iff (X \to Y) \land (Y \to X) \tag{25}$$
$$\neg\top \iff \bot \tag{26}$$