Diskrete Mathematik für Informatikstudien
Sommersemester 2020

8. Übungsblatt (12.5.2020)

Beispiel 8.1. Zu den aussagenlogischen Variablen A, B, C sind die Formeln

$$X = (A \to B) \leftrightarrow C \qquad \text{und} \qquad Y = A \to (B \leftrightarrow C)$$

gegeben. Ermitteln Sie mittels einer Wahrheitstafel jeweils die n-KNF und n-DNF von X und Y.

Beispiel 8.2. Ermitteln Sie mit Hilfe der Regeln auf der zweiten Seite für die Formeln X und Y aus Beispiel 8.1 jeweils eine DNF und KNF, die aus möglichst wenigen Klauseln (bzw. dualen Klauseln) bestehen.

Beispiel 8.3. Drücken Sie die folgenden Aussagen über natürliche Zahlen in Prädikatenlogik aus. Dabei werden alle verwendeten Variablen automatisch als Elemente der natürlichen Zahlen angenommen. (Man muss also zu Ausdrücken wie $\exists n$ nicht zusätzlich sagen, dass n eine natürliche Zahl sein soll.) Neben Quantoren und Junktoren sind nur folgende Symbole erlaubt:

- Konstante 1;
- Funktionssymbole $+$ und $\cdot$ (zweistellig, übliche Bedeutung);
- Relationssymbol $=$.

(a) x ist eine Primzahl.

(b) x ist kongruent zu y modulo z.

(c) $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$.

Beispiel 8.4. Ermitteln Sie jeweils die Menge der freien Variablen in den folgenden Formeln.

(a) $\Big(\exists x\big(\neg P(x,y) \wedge \forall y Q(y,z)\big)\Big) \to \big(\forall z P(x,z)\big)$.

(b) $\forall x\Big(\big(P(x,y) \vee \exists y \neg Q(x,y)\big) \to R(x)\Big)$.

Beispiel 8.5. Bringen Sie die folgenden Formeln in pränexe Normalform.

(a) $\neg\exists y\Big(\big(\forall x P(x,y)\big) \to \exists z \neg\big(\exists x Q(x,y,z)\big)\Big)$.

(b) $\forall x\big(\forall y \exists z R(x,y,z) \vee \exists z \forall y \neg R(x,y,z)\big)$.

Liste der erlaubten Regeln

Für jegliche aussagenlogische Formeln X, Y, Z gelten die folgenden Regeln.

$$\neg\neg X \iff X \tag{1}$$
$$(X \wedge Y) \wedge Z \iff X \wedge (Y \wedge Z) \tag{2}$$
$$(X \vee Y) \vee Z \iff X \vee (Y \vee Z) \tag{3}$$
$$X \wedge Y \iff Y \wedge X \tag{4}$$
$$X \vee Y \iff Y \vee X \tag{5}$$
$$X \wedge (Y \vee Z) \iff (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \tag{6}$$
$$X \vee (Y \wedge Z) \iff (X \vee Y) \wedge (X \vee Z) \tag{7}$$
$$\neg(X \vee Y) \iff \neg X \wedge \neg Y \tag{8}$$
$$\neg(X \wedge Y) \iff \neg X \vee \neg Y \tag{9}$$
$$X \to Y \iff \neg X \vee Y \tag{10}$$
$$X \to Y \iff \neg Y \to \neg X \tag{11}$$
$$X \vee \neg X \iff \top \tag{12}$$
$$X \wedge \neg X \iff \bot \tag{13}$$
$$X \vee \top \iff \top \tag{14}$$
$$X \wedge \bot \iff \bot \tag{15}$$
$$(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \implies (X \to Z) \tag{16}$$
$$\bot \implies X \tag{17}$$
$$X \implies \top \tag{18}$$
$$X \wedge \top \iff X \tag{19}$$
$$X \vee \bot \iff X \tag{20}$$
$$X \wedge X \iff X \tag{21}$$
$$X \vee X \iff X \tag{22}$$
$$X \wedge Y \implies X \tag{23}$$
$$X \implies X \vee Y \tag{24}$$
$$X \leftrightarrow Y \iff (X \to Y) \wedge (Y \to X) \tag{25}$$
$$\neg\top \iff \bot \tag{26}$$